数学分析习作课讲义

[illegible] 编

上册

北京师范大学出版社

数学分析习作课讲义

上　册

薛宗慈　曾昭著
邝荣雨　陈平尚　编

数学分析习作课讲义

上　册

薛宗慈　曾昭著
邝荣雨　陈平尚　编

*

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

天津黎明印刷厂印刷

*

开本：787×1092　1/32　印张：10.25　字数：215千

1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

印数：1——28,000

统一书号：13243·75　定价：2.30元

内容简介

本书是在北京师范大学数学系数学分析习作课实践的基础上编写的．内容包括函数、数列的极限、函数的极限、连续函数、极限论、单变量微分学、单变量积分学、无穷级数和广义积分等．

本书可作为高等师范院校和师范专科学校数学系学生的参考书或教学参考书．

序　言

数学分析习作课是分析课的重要组成部分，它在加深学生对于数学新概念的理解，培养逻辑推理能力，以及计算技巧的训练方面都起着一定作用，多年来担任这门课的教师都在上课以前绞尽脑汁去选择每次课的内容，尤其对于一些没有教学经验的年青教师备起课来更是无所适从，我们有鉴于此才着手编写此书，编写过程中参考了洪良辰、潘淑琴、曾昭著和陈平尚几位同志的习作课讲稿，他们的实践经验对于此书的编写起着很大的启示和帮助作用。

目前各院校所用数学分析的课本不同，习作课的时间安排各异，本书为了适应多方面的情况，不得不按照数学分析的主要内容分章编写，这样，教师可按照自己教学情况安排每章上习作课的次数，书中所用符号、定义和定理基本上采用上海复旦大学所编数学分析教材（第二版）的条款。因此，有些定义在书中就不再重复叙述。

本书是在赵慈庚教授和董延闿教授的赞助和指导下编写的，两位老师无论在内容的安排以及文字的修饰上都付出了辛勤的劳动，我们表示衷心的感谢，由于我们的业务水平和写作能力的限制，完稿后仍然不能达到预期的要求，何况习作课的教材究竟应该怎样编写还在探索之中，希望读者提出宝贵意见。

编者

一九八四年三月

目　录

第一章　函数

§1　函数概念

本节的重点是函数概念。通过讨论、练习，使读者加深对这一概念的理解。

首先复习函数定义：设 X 是实数集 R 的子集。如果存在一个对应法则 f，使得对于 X 中的每个 x，按对应法则 f，都有唯一的实数 y 与之对应，则称 f 是定义在 X 上的函数（或称 f 是 X 到 R 的映射），记作：

$$f: X \longrightarrow \mathbf{R}$$

或简称函数 f。有时记

$$f: x \longmapsto y$$

以表示与数 x 对应的是 y。

其中 X 叫做函数 f 的定义域，与 x 相对应的 y 叫做函数 f 在 x 的值简称函数值（或称 y 为 x 在映射 f 作用下的象），记作 $y=f(x)$。又称 $f(X)=\{f(x)\,|\,x\in X\}$ 为函数 f 的值域。

有时也以 D_f、R_f 分别表示 f 的定义域和值域。

为了加深对函数概念的理解，讨论以下几个问题：

1．函数f与函数值f(x)

在以上定义中，函数 $f: X\to \mathbf{R}$ 与函数值 $f(x)$ 是两个截然不同的概念。前者是集合 X 到 R 的一个单值对应规律

（即映射），后者是实数值。不过在数学分析中习惯于用 $f(x)$ 表示函数 $f: X \to \mathbf{R}$。我们仍然保留记号 $f(x)$ 这一习惯用法；但要注意，当遇到记号 $f(x)$ 时，要根据上下文弄清楚它是代表函数值还是代表函数 $f: X \to \mathbf{R}$。

2．函数的相等与不等

我们把"函数 f 与 g 相等"定义为 f 与 g 是同一个映射，即它们有相同的定义域 X 和相同的对应规律。而有相同的对应规律是指对 X 中的每个实数 x，都有 $f(x)=g(x)$。这里 $f(x)=g(x)$ 就是函数值相等。而"函数 f 与 g 不等"的意思就是 f 与 g 不是同一个映射，即或者它们的定义域不同，或者虽然定义域相同，但对应规律不同（对应规律不同的意思是：至少在定义域 X 中有一个 x，使 $f(x) \neq g(x)$，这里 $f(x) \neq g(x)$ 就表示函数值不等）。

一定要分清"函数的相等与不等"与"函数值的相等与不等"。

练习 1　以下各组函数是否相等？

(a)　$f(x)=1+x^2$　　$(1 \leqslant x \leqslant 3)$，

　　$g(x)=1+x^2$　　$(2 \leqslant x \leqslant 4)$。

(b)　$f(x)=\ln x^2$，　　$g(x)=2\ln x$。

(c)　$f(x)=1$，　　$g(x)=\dfrac{x}{|x|}$。

(d)　$f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=|x|$，$h(x)=\begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$。

注意：(a) 中的 f 与 g，尽管其表达式形式相同，但由于它们的定义域不同，因而不相等：即 $f \neq g$。只是在 f 与 g

都有定义的区间 $2\leqslant x\leqslant 3$ 内 f 与 g 的函数值相等，即

$$f(x)=g(x)\quad 当\ 2\leqslant x\leqslant 3。$$

3. 函数的表示法

函数的表示法就是用来确定 X 到 R 的单值对应规律的办法。常见的办法有列表法、公式法（解析法）、图表法等。由于学生接触较多的是用公式表示的函数，他们常常不自觉地以为只有公式才是表示函数的最好的方法。其实函数概念的本质是 X 到 R 的单值对应规律，用什么办法来表达这个规律，纯属方法问题。没有理由对用来表达对应规律的办法加以任何限制，也说不上这些方法的优劣。（当然从应用的角度来说，这些方法可能适应不同的需要，有时需加以选择）作为练习，可要求学生总结一下他所遇见的函数都有哪些表示方法，举几个不是用一个统一的公式表示的函数，再要求学生证明一下函数 $\sin x$、$\lg x$、$[x]$（注意：$\sin x$、$\lg x$，$[x]$ 都是函数记号）的对应规律是用什么办法确定的。

4. 函数的图象与用图象表示函数

在中学已经作过许多函数的图象。我们知道，函数的图象是平面上某个点集。如果把平面上的点用有序实数对 (x,y) 来表示，那么函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 的图象就是平面点集

$$G_f=\{(x,f(x))\mid x\in X\}$$

习惯上也称 G_f 为函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 的曲线。由函数的定义知：任何一条与 y 轴平行的直线与 G_f 至多有一个公共点。

反过来，如果 $G=\{(x,y)\}$ 是平面上某个点集，其中 x 的取值范围是集合 $X\subseteq\mathbf{R}$。如果任何一条与 y 轴平行的直线与集合 G 至多有一个公共点，那么对 X 中每个实数 x，必有唯一的实数 y，使 $(x,y)\in G$，令 $x\longmapsto y$，便得到函数 $f:X\to\mathbf{R}$，

且G恰是f的图象。这时我们也说G表示一个函数$f: X\to\mathbf{R}$。

因此平面点集G能表示一个函数$f: X\to\mathbf{R}$的特征就是：任何一条与y轴平行的直线与G至多有一个公共点。

通常把点集G直观地叫做曲线，这样，上面的这段话便可叙述为：

曲线L能表示一个函数$f: X\to\mathbf{R}$的特征就是任何一条与y轴平行的直线与L至多交于一点。

曲线L能表示函数$f: Y\to\mathbf{R}$的特征与此类似。

若不加说明，我们说曲线表示函数，总是指$f: X\to\mathbf{R}$。

练习2 作出以下函数的图象

(a) $f(x)=|x|$； (b) $f(x)=\sin x$；

(c) $f(x)=[x]$； (d) $f(x)=\sqrt{x}$； (e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$。

练习3 以下各曲线是否表示函数$f: X\to\mathbf{R}$？

(a) 平面上一个圆；

(b) 平面上一条抛物线

  (i) 对称轴平行于x轴，

  (ii) 对称轴平行于y轴。

练习4 为什么通常实验中的“时间—温度”曲线、“时间—速度”曲线一定能表示函数？

§2 函数的几何性质

习作课上可先复习有关定义，再挑选几个题目作为练习。要求读者能够根据各种定义证明函数的相应性质（如有界性、奇偶性、周期性、单调性等），并力求论证严密，表达清晰。在技巧上不作过高要求，注意纠正学生在论证中出

现的错误和叙述上的不当之处。

练习1 证明函数 $f(x)=x^3$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调增加。

（只需证明：对任何实数 x_1，x_2，只要 $x_2>x_1$，就有 $f(x_2)-f(x_1)=x_2^3-x_1^3>0$。将 $x_2^3-x_1^3$ 分解因式后，易证。）

练习2 证明函数 $f(x)=\sin x$ 在 $[0,\pi/2]$ 内单调增加。

（提示：利用和差化积公式将

$f(x_2)-f(x_1)=\sin x_2-\sin x_1$ 变形）

练习3 证明 $f(x)=\operatorname{tg}x$ 在任何 $(k\pi-\pi/2,\ k\pi+\pi/2)$ 内单调增加。（k为整数）

练习4 试证 $f(x)=\sin x+\cos x$ 的（最小）周期是 2π。

（注意：只证明 $f(x+2\pi)=f(x)$，还不能断定 2π 是 f 的最小周期。）

练习5 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数,}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数}\end{cases}$$

是不是周期函数？它的周期是什么？有没有最小周期？

§3 反函数与复合函数

本节重点是反函数与复合函数概念，要求学生能正确叙述并且理解反函数与复合函数定义。

复习一下反函数的定义

如果对于函数 $f: X\to \mathbf{R}$ 的值域 $R_f=f(X)$ 中的每一 y，

都有唯一的 x 使得 $f(x)=y$，规定对应关系：$y\longmapsto x$，这样确定的函数 $f^{-1}:R_f\longrightarrow \mathbf{R}$ 叫做函数 f 的反函数。

也可以把说法稍微改变一下：

函数 $f:X\to\mathbf{R}$ 的值域是 R_f。显然对每个 $y\in R_f$，方程 $f(x)=y$ 在 X 中至少有一个解 x，如果对每个 $y\in R_f$，上述的解 x 是唯一的，规定 $y\longmapsto x$。这样确定的函数 $f^{-1}:R_f\to\mathbf{R}$ 叫做函数 f 的反函数。

练习1 证明：如果对于D_f 中的任意 x_1，x_2，由 $x_1\neq x_2$ 可推出 $f(x_1)\neq f(x_2)$，则 f 有反函数。

练习2 证明：任何严格单调的函数必有反函数.若“严格单调”改为“单调”，结论还成立吗？

练习3 若函数 f 有反函数，那么 f 一定严格单调吗？

练习4 证明函数 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$(-\infty<x<+\infty)$有反函数，并求出其表达式。

证明 此处 $X=(-\infty,+\infty)$ $f(X)=(-\infty,+\infty)$

对每个 $y\in(-\infty,+\infty)$，方程$\dfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=y$ 有唯一解

$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$ $\therefore x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})(-\infty<y<+\infty)$

便是$y=f(x)$的反函数。

再复习复合函数定义

设 f、g 是函数，D_f、D_g、R_f、R_g 的意义如前所述。如果 $R_f\subset D_g$，于是对 D_f 中每个 x，$f(x)\in D_g$，因此$g(f(x))$有意义，规定 $x\longmapsto g(f(x))$，得到的函数记作 $g\circ f:D_f\to\mathbf{R}$叫做 f 与 g 的复合函数。显然 $D_{g\circ f}=D_f$。

由定义知，f 与 g 可以复合的条件是：$R_f \subset D_g$。

练习1 函数 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=\ln x$ 可以复合吗？如果可以复合，将$g\circ f$ 表示出来。

解 $D_f=(-\infty, +\infty)$ $R_f=(1, +\infty)$

$D_g=(0, +\infty)$

由于$R_f \subset D_g$，故 f 与 g 可以复合，复合成的函数是

$$g\circ f: D_f \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$(x \longmapsto \ln(x^2+1))$$

也说 $g(f(x))=\ln(x^2+1)$是 f 与 g 的复合函数。

练习2 练习 1 中的 g 与 f、f 与 f、g 与 g 是否可以复合为 $f\circ g$，$f\circ f$，$g\circ g$？如果可以复合，写出复合函数的表达式。

（答：f 与 f、g 与 f 可以复合；g 与 g不可以复合。）

练习3 函数 $f(x)=\sin x$与 $g(x)=\ln x$ 可以复合成 $g\circ f$ 吗？

由于 $R_f=[-1, 1]$，$D_g=(0, +\infty)$，$R_f \not\subset D_g$，根据定义知 f 与 g 不可以复合。

但如果将 f 的定义域缩小为 $X_1=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty}(2k\pi, (2k+1)\pi)$，则 $R_f \subset D_g$，于是 f 与 g 可以复合。严格说来，这里的 f 与开始的 f 不是一个函数。我们把定义域缩小为 X_1 后的函数叫做函数 f 在X_1 上的限制，记为 $f|_{X_1}$。因此严格说来这里的复合实际是 $f|_{X_1}$ 与 g 的复合，不过通常仍然简单地说成 f 与 g 的复合，并用 $g(f(x))=\ln\sin x$ 表示。按同样的理解，练习 2 中的 g 与 g 可以复合成 $g(g(x))=\ln\ln x$，它的定义域是（1，$+\infty$）。

还要注意，f 与 g的复合同 g 与 f 的复合不是一回事。

§ 4　数学归纳法

当证明与任意自然数 n 有关的命题 $P(n)$ 时，常可采用数学归纳法的证明形式：首先证明命题 $P(1)$ 正确；然后证明只要命题 $P(k)$ 正确，则命题 $P(k+1)$ 正确。完成了以上两个证明步骤，就可以肯定，对任意自然数 n，命题 $P(n)$ 正确。

在习作课上，可以选择一些有用的等式及不等式，其中多数由读者练习用数学归纳法证明，少数可作例题讲解。

例 1　试用数学归纳法证明

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

例 2　证明　$2^n\geqslant n^2$ 当 $n\geqslant 5$ 时成立。

（提示：由归纳假设知，$2^{k+1}=2\cdot 2^k\geqslant 2k^2$，因此只需证 $2k^2\geqslant(k+1)^2$ 即可）

例 3　证明不等式 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

证明　（i）　当 $n=1$ 时，$\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$，不等式成立。

（ii）　若当 $n=k$ 不等式成立，

即 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

则 $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\ \frac{2k+1}{2(k+1)}$

因此只要证明 $\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\ \frac{2k+1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ （*）

则就证明了当 $n=k+1$ 时，不等式成立。

上述（*）式成立，只需 $(2k+1)(2k+3)<(2k+2)^2$

即 $4k^2+8k+3<4k^2+8k+4$

最后的不等式显然成立，因而（*）式成立。

由（i），(ii)知，原不等式对一切自然数 n 都成立。

例 4　设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 皆为正数，

证明：$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

这是一个著名的定理：任意有限个正数的几何平均数不超过其算术平均数。关于这个不等式有许多有趣的证明，或者是直接用数学归纳法，或者是利用数学归纳法的变形。这里介绍几种证法，课上可介绍一两种，其余的供参考。从这里可以学习运用数学归纳法证题时的一些技巧。

证法 1　（直接用数学归纳法）

（i）　当 $n=1$ 时，$a_1=a_1$ 不等式成立

(ii)　若当 $n=k$ 时，有 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}$

则当 $n=k+1$ 时，

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}=\frac{k\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_k}{k}+a_{k+1}}{k+1}$$

$$\geqslant \frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}}{k+1}$$

设　$a_1a_2\cdots a_k = x^{k(k+1)}$　　$a_{k+1}=y^{k+1}$

则　$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$

要证明：$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}\geqslant 0$

现在　$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1}}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_k\cdot a_{k+1}}$

$$\geqslant \frac{k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}+a_{k+1}}{k+1}-\sqrt[k+1]{a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}}$$

$$=\frac{kx^{k+1}+y^{k+1}}{k+1}-x^ky=\frac{kx^{k+1}+y^{k+1}-kx^ky-x^ky}{k+1}$$

$$=\frac{x-y}{k+1}[kx^k-y(x^{k-1}+x^{k-2}y+\cdots+xy^{k-2}+y^{k-1})]$$

$$=\frac{x-y}{k+1}[(x^k-x^{k-1}y)+(x^k-x^{k-2}y^2)+\cdots+$$

$$(x^k-y^k)]$$

$$=\frac{(x-y)^2}{k+1}[x^{k-1}+x^{k-2}(x+y)+\cdots+(x^{k-1}+x^{k-2}y+$$

$$\cdots+y^{k-1})]\geqslant 0$$

因此不等式当 $n=k+1$ 时成立。

由(i)、(ii)知，对任意 n，不等式成立。

如果将原不等式进行适当变形，仍用数学归纳法进行证明，其中推算可以简单些。

证法 2　原不等式与以下不等式等价

$$\frac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\frac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\cdots+\frac{a_n}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\geqslant n$$

设 $b_i=\frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，

则 $b_1b_2\cdots b_n=1$

因此只要证明以下命题即可：

"若 $b_1,b_2,\cdots,b_n$是正数，且 $b_1\cdot b_2\cdots b_n=1$ 则 $b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant n$"

现在用数学归纳法证明这个命题。

(i) 当$n=1$ $b_1=1$ 命题成立。

(ii) 若当 $n=k$ 时，命题成立，即：

若 $b_1,b_2,\cdots,b_k>0$，且 $b_1\cdot b_2\cdots b_k=1$，则

$$b_1+b_2+\cdots+b_k\geqslant k$$

看 $n=k+1$ 时，情形如何。设 $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_{k+1}>0$

且 $\bar{b}_1\cdot\bar{b}_2\cdots\bar{b}_k\cdot\bar{b}_{k+1}=1$

若 $\bar{b}_1=\bar{b}_2=\cdots=\bar{b}_k=\bar{b}_{k+1}=1$，命题显然成立；

若 $\bar{b}_1,\bar{b}_2,\cdots,\bar{b}_k,\bar{b}_{k+1}$不全为1，则由于$\bar{b}_1\cdot\bar{b}_2\cdots\bar{b}_{k+1}=1$，则诸$\bar{b}_i$中必有大于1及小于1者，适当调换$\bar{b}_i$之足码$i$，可设 $\bar{b}_k<1$，$\bar{b}_{k+1}>1$

于是由 $(1-\bar{b}_k)(1-\bar{b}_{k+1})<0$

推出 $\bar{b}_k+\bar{b}_{k+1}>\bar{b}_k\bar{b}_{k+1}+1$ (*)

另一方面，由于$\bar{b}_1\cdot\bar{b}_2\cdots\bar{b}_{k-1}\cdot(\bar{b}_k\bar{b}_{k+1})=1$按归纳假设有：

$$\bar{b}_1+\bar{b}_2+\cdots+\bar{b}_{k-1}+(\bar{b}_k\,\bar{b}_{k+1})\geqslant k$$

因而 $\bar{b}_1+\bar{b}_2+\cdots+\bar{b}_k+\bar{b}_{k+1}$

$$=\bar{b}_1+\bar{b}_2+\cdots+\bar{b}_{k-1}+(\bar{b}_k+\bar{b}_{k+1})$$

$$>(\bar{b}_1+\bar{b}_2+\cdots+\bar{b}_{k-1}+\bar{b}_k\,\bar{b}_{k+1})+1$$

$$\geqslant k+1$$

因此当 $n=k+1$ 时，命题成立。

由(i)及(ii)知，对任意自然数 n，命题成立。

以上证明（ii）时，在归纳假设下，先证出（*）式；进而再利用（*）式证明当 $n=k+1$ 时命题成立。这是综合法的表达方式。那么如何想到先证出（*）式呢？实际上，在归纳假设下（即当 $n=k$ 时命题成立），要证当 $n=k+1$ 时命题成立，稍加分析便可看出关键在于证明(*)式。在中学证明几何或代数问题时，经常采用这种分析——综合的思考方法。

以下两种证明方法是数学归纳法的灵活运用，或者说是归纳法的变形。

证法 3 要证 $a_1\cdot a_2\cdots a_n\leqslant\left(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right)^n$

（i） 在证法 1 中，由当 $n=k$ 时不等式正确推导当 $n=k+1$ 时不等式正确是比较困难的。但是由 $n=k$ 时的正确性推导 $n=2k$ 时的正确性却很简单，只要利用我们所熟悉的不等式 $\sqrt{a_1a_2}\leqslant\dfrac{a_1+a_2}{2}$ 即可，因此我们可以先证明不等式对一切 $n=2^k$ 成立（具体证明由同学补上）

（ii） 再证明不等式对一切 $n>2$，$n\neq 2^k$ 成立，设

$2^m < n < 2^{m+1} = p$

考虑 $a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}, \cdots, a_{2^{m+1}} = a_p$

其中 $a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_p = a = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$

（即在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 后面添上 $p-n$ 个数，使得其原来的算术平均数 $a = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ 保持不变。）由（i）知：

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_p \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{p} \right)^p$$

而 $a_1 \cdot a_2 \cdots a_p = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \cdot a^{p-n}$

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_p}{p} \right)^p = \left(\frac{na + (p-n)a}{p} \right)^p = a^p$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n a^{p-n} \leqslant a^p$$

$$a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leqslant a^n = \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \right)^n$$

由（i）及(ii)知，对一切自然数n不等式成立。

证法 4

（i） 证当 $n = 2^k$，不等式成立。（同证法 3）

(ii) 证若当 $n = m$ 不等式成立，则当 $n = m-1$ 时不等式成立。

若 $\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_m} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m}$

要证 $\sqrt[m-1]{a_1 a_2 \cdots a_{m-1}} \leqslant \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}}{m-1}$

令 $b = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}}{m-1}$ 则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} = (m-1)b$

由归纳假设知：

$$\sqrt[m]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_{m-1} b} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} + b}{m} = b$$

$$\therefore \quad a_1 a_2 \cdots a_{m-1} b \leqslant b^m$$

$$\sqrt[m-1]{a_1 a_2 \cdots a_{m-1}} \leqslant b = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1}}{m-1}$$

由(i)(ii)知，对任意自然数n，不等式成立。最后这种证法是柯西提出的，与证法3基本思想是一致的。与证法1相比，它们显得更加巧妙。

例5 试证不等式 $H \leqslant G \leqslant A$

式中A、G、H分别表示n个正数a_1，a_2，…，a_n的算术平均数、几何平均数与调和平均数。

其中调和平均数$H = \dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$（即$a_1$，$a_2$，…，$a_n$倒数的算术平均数的倒数）

证 例(4)证明$G \leqslant A$，又将例4用于$\dfrac{1}{a_1}, \dfrac{1}{a_2}, \cdots, \dfrac{1}{a_n}$，得：

$$\frac{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdots \frac{1}{a_n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}}$$

推出 $H \leqslant G$

将两个不等式联在一起，得：

$$H \leqslant G \leqslant A$$

上式当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时才取着等号。

不等式 $H\leqslant G\leqslant A$ 很有用。作为练习，可以利用它来证明以下诸不等式：

(a) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个正数，

则 $(a_1+a_2\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$

$a_1^n+a_2^n+\cdots+a_n^n\geqslant na_1a_2\cdots a_n$；

(b) 若 a、b 是两个正数，

则 $ab^n\leqslant\left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}$；

(c) 若 $x\geqslant 0$，

则 $1+x+x^2+\cdots+x^{2n}\geqslant(2n+1)x^n$；

(d) 当 $n>1$，$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$。

§ 5 不等式与绝对值不等式

在 § 4，利用数学归纳法证明了一些不等式。由于在数学分析中经常遇到证不等式与解不等式的问题，因此在本节继续做些关于不等式的练习。

证不等式的意思很清楚。所谓解不等式，就是找出满足不等式的变量的一切数值。方法是将原不等式进行一系列等价变形，最后变成一个简单的不等式，而满足这个不等式的变量的数值范围是显而易见的。

关于解绝对值不等式，上述原则也是适用的。下面是对绝对值不等式进行等价变形时常用的方法和根据。

设　A，B 皆为某个分析式子，则

（i）　当$B>0$时，

$$|A|\leqslant B \iff -B\leqslant A\leqslant B$$

$$|A|\geqslant B \iff A\geqslant B \text{ 或 } A\leqslant -B$$

(ii)若 A、B 皆非负，则：

$$A\leqslant B\iff A^2\leqslant B^2$$

特别地，若数 $a>0$，

则　$|f(x)|\leqslant a \iff f^2(x)\leqslant a^2$

$$|f(x)|\geqslant a \iff f^2(x)\geqslant a^2$$

注意，上述诸不等式命题都可以改为严格不等式命题。

先做几个证明不等式的练习

例 1　试证：对任何实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$；$b_1, b_2, \cdots, b_n$，不等式 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$ 成立。

证　令$B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$

$$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2$$

$$C=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$$

原不等式为　$B^2-AC\leqslant 0$　又$A\geqslant 0$

因此只要证明　$f(X)=AX^2+2BX+C\geqslant 0$ 即可

$\because$　$f(X)=AX^2+2BX+C$

$$=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)X^2+2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)X+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(a_iX+b_i)^2\geqslant 0$$

$\therefore$　$B^2-AC\leqslant 0$　　　$\therefore$　原不等式成立。

这不等式叫施瓦兹（Schwarz）不等式，是一个非常有用的不等式，将此不等式两边开方，得：

$$|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n|$$
$$\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

如果 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$b=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 表示 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量，$<\cdot,\cdot>$ $\|\cdot\|$分别表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积和模，则施瓦兹不等式可以写成

$$|<a, b>|\leqslant\|a\|\cdot\|b\|$$

当 $n=2$，3 时，它有明显的几何意义。

作为练习，可应用施瓦兹不等式证明以下几个不等式：

（a） $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2$

（b） 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是正数，则

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant n^2$$

（c） 对任意 $2n$ 个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，$b_1,b_2,\cdots,b_n$，以下不等式成立：

$$\sqrt{(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\cdots+(a_n+b_n)^2}$$
$$\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$$

（d） $\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2\leqslant 2n$

〔提示：用施瓦兹不等式易证

$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2\leqslant n\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$，再设法

证右端括号内的式子小于 2；

也可以用数学归纳法证(d)]

例 2　试证不等式

$$|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}.$$

证法 1　将不等式两边平方**，得：

$$a^2\cos^2 x + 2ab\cos x\sin x + b^2\sin^2 x \leqslant a^2 + b^2$$

即　$a^2\sin^2 x - 2ab\cos x\sin x + b^2\cos^2 x \geqslant 0$

即　$(a\sin x - b\cos x)^2 \geqslant 0$

∴　原不等式成立。

证法 2　因为

$$\frac{a\cos x + b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x$$

$$= \sin(\varphi + x)$$

其中　$\varphi = \mathrm{tg}^{-1}\dfrac{a}{b}$

而　$|\sin(\varphi + x)| \leqslant 1$　　∴　原不等式成立。

证法 3　据施瓦兹(Schwarz)不等式，得：

$$|a\cos x + b\sin x| \leqslant (\sqrt{a^2+b^2})(\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x})$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}.$$

再做几个解不等式的练习。

例 3　解不等式　$|x^2+3x-4| > x^2+3x-4$.

解　由于 $|y| > y \Longleftrightarrow y < 0$,

因此原不等式与以下不等式等价：

$$x^2+3x-4 < 0$$

** 注意，这是等价变形，后面几步也是。

解之得$-4<x<1$。

例 4 解不等式$\left||x+1|-|x-1|\right|<1$。

解 $\left||x+1|-|x-1|\right|<1$

$\Longleftrightarrow$ $(x+1)^2-2|x^2-1|+(x-1)^2<1$

$\Longleftrightarrow$ $x^2+1-(x^2-1)<1/2$

$\Longleftrightarrow$ $|x^2-1|>x^2+1/2$

$\Longleftrightarrow$ $x^2-1>x^2+1/2$ 或 $x^2-1<-(x^2+1/2)$

$\Longleftrightarrow$ $2x^2<\frac{1}{2}$

$\Longleftrightarrow$ $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$.

例 5 解不等式 $\left||x+1|-|x-1|\right|\geqslant\frac{1}{2}$.

解法与例 4 类似，解为$x\geqslant\frac{1}{4}$ 或 $x\leqslant-\frac{1}{4}$

或者说解集为$X=(-\infty, -\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{4}, +\infty)$ 。

以上例 4 、例 5 也可以采取其他解法：分别在$(\infty, -1)$，$[-1, 1]$及$(1, +\infty)$ 内考虑，原不等式的内层绝对值符号可以去掉，再进一步求解；或者先去掉外层绝对值符号，再进一步求解。

第二章　数列的极限

§1　数列收敛性的判定 I：按定义证明数列极限

按定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的关键在于证明定义中 $N(\varepsilon)$ 的存在。（对具体的 $\{x_n\}$，常常可以求出 $N(\varepsilon)$ 的值。）

方法1　直接解不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$，求 $N(\varepsilon)$。

例1　设 $|q|<1$　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

证　$\forall\varepsilon>0$，解不等式 $|q^n-0|<\varepsilon$

得 $n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$。若取 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$，则当 $n>N(\varepsilon)$ 时，$|q^n-0|<\varepsilon$。　$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$。

例2　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n}{2n+1}=2$。

证　$\forall\varepsilon>0$，解不等式 $\left|\dfrac{2n}{2n+1}-2\right|<\varepsilon$

得 $n>\dfrac{2}{\varepsilon}-1$，可取 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{2}{\varepsilon}-1\right]$。

例3　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　（$a>1$）。

证 $\forall \varepsilon > 0$，解不等式 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$

得 $n > \dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}$。可取 $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{\log_a(1+\varepsilon)}\right]$。

然而不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 并非总是可以解出的，因此这种方法只适用一些极简单的数列。

在谈第二种方法之前，先看一个例子。

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{9n^3+7} = 0$。

证 不等式 $\left|\dfrac{2n-1}{9n^3+7} - 0\right| < \varepsilon$ 即 $\dfrac{2n-1}{9n^3+7} < \varepsilon$ 不易求解，因而想按方法 1 求 $N(\varepsilon)$ 就很困难。

我们把 $\left|\dfrac{2n-1}{9n^3+7} - 0\right|$ 适当放大

$$\left|\frac{2n-1}{9n^3+7} - 0\right| \leqslant \frac{2n}{9n^3} = \frac{2}{9n^2}$$

对不等式的右端 $\dfrac{2}{9n^2}$，当 n 充分大时，它的值可以任意小，因而左端也可以任意小。具体地说，$\forall \varepsilon > 0$，由 $\dfrac{2}{9n^2} < \varepsilon$ 解出 $n > \sqrt{\dfrac{2}{9\varepsilon}}$，若取 $N(\varepsilon) = \left[\sqrt{\dfrac{2}{9\varepsilon}}\right]$，则当 $n > N(\varepsilon)$ 时，$\dfrac{2}{9n^2} < \varepsilon$。

因而 $\left|\dfrac{2n-1}{9n^3+7} - 0\right| \leqslant \dfrac{2}{9n^2} < \varepsilon$

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{9n^3+7}=0$。

由以上证法归纳出以下的

方法 2 如果$|x_n-a|<\varepsilon$不易求解，可以设法先把$|x_n-a|$适当地放大：$|x_n-a|\leqslant\varphi(n)$

（例 4 中的$\frac{2}{9n^2}$就是$\varphi(n)$）；然后通过解$\varphi(n)<\varepsilon$，求$N(\varepsilon)$。

所谓“适当地放大”就是要求放大的$\varphi(n)$必须仍是无穷小量，不过形式较$|x_n-a|$简单，因而$\varphi(n)<\varepsilon$较$|x_n-a|<\varepsilon$容易求解。

这种方法是常用的。这里我们明确了“适当放大”的原则，下面要通过一定数量的例题及练习，使读者掌握一些适当放大的办法。

例 4 中的$|x_n-a|$是一个有理分式，采取分子放大、分母缩小的办法将其放大为$\varphi(n)=\frac{2}{9n^2}$；$\frac{2}{9n^2}$是无穷小量，因而放大是适当的。也可以将$|x_n-a|$放大为$\frac{1}{n^2}$或者是$\frac{1}{n}$，因为$\frac{1}{n^2}$，$\frac{1}{n}$都是无穷小量，因此这些放大都是适当的。当然放大后的$\varphi(n)$不同，求得的$N(\varepsilon)$一般也不相同，不过从极限的定义来看，这是无关紧要的。

还应当注意，定义中的$N(\varepsilon)$只能与ε有关，绝对不能又依赖于n，如在例 4 中，采取以下的解法，就有问题。

因为 $\left|\frac{2n-1}{9n^3+7}-0\right| \leqslant \frac{2n}{9n^3+7}$

要使 $\frac{2n}{9n^3+7}<$ 只需 $9n^3+7>\frac{2n}{\varepsilon}$ 即 $n>\sqrt[3]{\frac{2n}{9}-\frac{7}{9}}$

若取 $N(\varepsilon)=\left[\sqrt[3]{\frac{2n}{9\varepsilon}-\frac{7}{9}}\right]$，则当 $n>N(\varepsilon)$，

$$\left|\frac{2n-1}{9n^3+7}-0\right|<\varepsilon.$$

上述证明形式上似乎通得过，实际是错误的。因为求得的N与n有关，所以并未证出：对每个正数ε，都能找到某一确定的项x_N，在它以后的一切x_n，满足$|x_n-0|<\varepsilon$。这种错误反映出对极限概念还不清楚，即令说是疏忽也是不允许的。

例 5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5n+11}{3n^2-n+6}=1$。

证 考虑

$$\left|\frac{3n^2+5n+11}{3n^2-n+6}-1\right|=\frac{6n+5}{3n^2-n+6}\underset{(当n\geqslant 6)}{\leqslant}\frac{7n}{3n^2}=\frac{7}{3n}$$

$\forall\varepsilon>0$， 要使 $\left|\frac{3n^2+5n+11}{3n^2-n+6}-1\right|\leqslant\frac{7}{3n}<\varepsilon$

只需 $n>\frac{7}{3\varepsilon}$。可取$N(\varepsilon)=\max\left\{6,\left[\frac{7}{3\varepsilon}\right]\right\}$

例 5 的证法与例 4 类似，也是将有理分式的分子放大、

分母缩小。但必须时刻注意放大后的$\varphi(n)$仍是无穷小量，否则将不能从不等式$\varphi(n)<\varepsilon$求出适合定义要求的$N(\varepsilon)$。

例 6　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$。

有的学生采用以下证法：

$\forall\varepsilon>0$，要使　$\left|x_n-\dfrac{3}{2}\right|=\dfrac{2n+3}{4n^2-2}<\dfrac{2n+3}{4n}<\varepsilon$，

只需 $n>\dfrac{3}{4\varepsilon-2}$，可取$N(\varepsilon)=\left[\dfrac{3}{4\varepsilon-2}\right]$。

以上证明是错误的。实际上不等式$\dfrac{2n+3}{4n}<\varepsilon$与

$(4\varepsilon-2)n>3$等价，仅当$\varepsilon>\dfrac{1}{2}$（即$4\varepsilon-2>0$）时，能解

出$n>\dfrac{3}{4\varepsilon-2}$，从而可令$N(\varepsilon)=\left[\dfrac{3}{4\varepsilon-2}\right]$；而当$0<\varepsilon<1/2$

（即$4\varepsilon-2<0$）时，对任意自然数n，$(4\varepsilon-2)n<3$，

因而$\dfrac{2n+3}{4n}>\varepsilon$，这样就求不出合于定义的$N(\varepsilon)$。产生这种错

误的原因是将$|x_n-3/2|$放大成的$\varphi(n)=\dfrac{2n+3}{4n}$已不是无穷

小量；而解不等式又没有注意$4\varepsilon-2$的符号，误以为它一定是正数。

象例 4—6 这类情形，放大后的$\varphi(n)$仍是有理分式，容易判断它是不是无穷小量。

例6中证法的错误很明显，不见得会有许多学生犯这种错误。但同样性质的错误，时有发生，特别是当$|x_n-a|$较复杂时，稍不注意就会出现放大过分的毛病。

如果分式中出现根号，将$|x_n-a|$放大时常常需要将分母或分子有理化。

例 7 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$。

证 $\forall\varepsilon>0$，要使

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|$$

$$=\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}$$

$$=\frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)}<\frac{a^2}{n}<\varepsilon$$

只需 $n>\dfrac{a^2}{\varepsilon}$ 可取 $N(\varepsilon)=\left[\dfrac{a^2}{\varepsilon}\right]$。

（直接由 $|x_n-a|<\varepsilon$，求$N(\varepsilon)$也不难，可试试看）

类似地，证明以下两个极限

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n})=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n+1}}=1$$

时，在将$|x_n-a|$适当放大的过程中也可将分子（或分母）有理化（留作练习）。

例 8 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$。

证明 分子是n^2，又按二项式定理，分母可写为

$$3^n=(1+2)^n=1+n\cdot 2+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}2^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}2^3+$$

$+\cdots+2^n$，因此当$n\geqslant 3$，3^n的展开式中就包含了n的三次多项式$\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}2^3$，弃去其余的项，得：

$$\frac{n^2}{3^n}\leqslant\frac{n^2}{\frac{4}{3}n(n-1)(n-2)}=\frac{3n}{4(n-1)(n-2)},\ (n\geqslant 3)$$

上式右方仍是无穷小量，但形式还嫌复杂。再放大得简单些：

$$\frac{n^2}{3^n}\leqslant\frac{3n}{4(n-1)(n-2)}\leqslant\frac{3}{4}\cdot\frac{n}{\frac{n}{2}\cdot\frac{n}{2}}=\frac{3}{n},\ (n\geqslant 4)$$

$\forall\varepsilon>0$，取$N(\varepsilon)=\max\left\{4,\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]\right\}$，当$n>N(\varepsilon)$时，

$$\left|\frac{n^2}{3^n}-0\right|\leqslant\frac{3}{n}<\varepsilon,\qquad\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0.$$

在以上证明中，因为分子是n^2，所以需要把分母3^n缩小为n的三次多项式。如果证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{3^n}=0$，也把$3^n$缩小为$n$的三次多项式，就把整个分式放大得过份了，这时显然应当把分母3^n缩小为n的四次多项式。把以上思路用下式表达：由于$a>1$，可设$a=1+\lambda$，$(\lambda>0)$

$$\therefore\quad 0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n^k}{(1+\lambda)^n}\underset{n>k}{\underset{\uparrow}{<}}\frac{n^k}{P_{k+1}(n)}\leqslant\varphi(n)$$

其中$P_{k+1}(n)$是n的$k+1$次多项式，$\varphi(n)$是形式简单的无穷小量。

对例 8 还可以考虑另一种证法，将3^n与n^3加以比较，容易猜想到从某个n_0之后永远有$3^n>n^3$。这可用数学归纳法证明，当然要找出具体的n_0来（这很容易）。剩下的放大的工作就简单得多了（作为练习）。

例 9　证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}=0$。

证　考察

$$0<\frac{100^n}{n!}=\frac{100\times100\times\cdots\times100}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot100}\cdot\frac{100\times100\times\cdots\times100}{101\times102\times\cdots\times n}$$

$$=M\cdot\frac{100\times100\times\cdots\times100}{101\times102\times\cdots\times n}<M\frac{100}{n},\ (n>100)$$

$\forall\varepsilon>0,\exists N(\varepsilon)=\max\left\{100,\left[\dfrac{100M}{\varepsilon}\right]\right\}$，当$n>N(\varepsilon)$时，

$$0<\frac{100^n}{n!}<\frac{100\cdot M}{n}<\varepsilon\quad\therefore\lim_{n\to\infty}\frac{100^n}{n!}=0.$$

到此简单小结一下：出现在例4—9中的x_n都具有分式形式，（其中有些是以n为变数的有理分式），当然$|x_n-a|$也可写成分式。象例4—6这种有理分式，可采取放大分子，缩小分母的办法；如果分子或分母中出现根式，则分子或分母的有理化或许对放大有所帮助（例 7 及练习）；如果出现了指数形式，则可借助于二项式定理（例 8）。而在例 9 中，采取了“部分

放大”的办法。即先限制$n\geqslant N_1$，可将$|x_n-a|$放大为$\varphi(n)$；再由解$\varphi(n)<\varepsilon$，得出$n>N_2$，于是取$N(\varepsilon)=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N(\varepsilon)$，$|x_n-a|<\varepsilon$。

上面说的几种办法是常用的，要通过一定的练习达到基本上掌握。下面再举两个例题，其证明也要用到二项式定理。

例10 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \qquad (a>1)$

证 令 $h_n=\sqrt[n]{a}-1$， $\sqrt[n]{a}=1+h_n$

$$a=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots h_n^n>1+nh_n$$

$\therefore \quad 0<h_n<\dfrac{a-1}{n}$

$\forall\varepsilon>0$，取$N(\varepsilon)=\left[\dfrac{a-1}{\varepsilon}\right]$，则当$n>N(\varepsilon)$时，

$$|\sqrt[n]{a}-1|=h_n<\varepsilon \quad \therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

例11 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

证 令$\sqrt[n]{n}-1=h_n$

$$n=(1+h_n)^n=1+nh_n+\frac{n(n-1)}{2!}h_n^2+\cdots+h_n^n>\frac{n(n-1)}{2}h_n^2$$

$$(n\geqslant 2)$$

$\therefore \quad 0<h_n<\sqrt{\dfrac{2}{n-1}} \qquad (n\geqslant 2)$

$\forall\varepsilon>0$，取$N(\varepsilon)=\max\left\{2,\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1\right]\right\}$，则当$n>N(\varepsilon)$，

$$|\sqrt[n]{n}-1|=h_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon,$$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

注意：例10、例11也可先把$|x_n-a|$,分子有理化，再适当放大（留作练习）。

试分析下面的证法是否正确？（例11）

$\forall\varepsilon>0$,要使$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$ 只须

$$\frac{1}{n}\ln n<\ln(1+\varepsilon),\qquad 就是要$$

$$\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}\leqslant\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}\qquad(n\geqslant 2)$$

即 $n\geqslant\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}$

若取$N(\varepsilon)=\max\left\{2,\left[\frac{\ln 2}{\ln(1+\varepsilon)}\right]\right\}$,则当$n>N(\varepsilon)$,

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon,\quad 因此\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

认真分析一下就会发现，当$n>N(\varepsilon)$时，不等式$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 并不一定成立。这是因为当$n\geqslant N(\varepsilon)$时，

$\frac{1}{n}\leqslant\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln 2}$成立。而由此不能推出$\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\ln n}$成立。即 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$不一定成立。

最后举两个部份放大的较复杂的例子，但不能要求所有

读者都立刻掌握这种方法。

例12 （数列前n项算术平均值的极限）

试证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a$

证 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\forall \varepsilon > 0$，$\exists$ N_1，当$n \geqslant N_1$时，

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$，于是当$n > N_1$时，

$$\left| \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} - a \right| = \frac{|x_1+x_2+\cdots+x_n - na|}{n}$$

$$\leqslant \frac{|x_1-a|+|x_2-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|}{n}$$

$$+\frac{|x_{N_1+1}-a|+|x_{N_1+2}-a|+\cdots+|x_n-a|}{n}$$

$$\leqslant \frac{A}{n} + \frac{n-N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

其中$A = |x_1-a| + |x_2-a| + \cdots + |x_{N_1}-a|$是一个定数，

再由$\dfrac{A}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$，解出 $n > \dfrac{2A}{\varepsilon}$，令$N_2 = \left[\dfrac{2A}{\varepsilon}\right]$，

若取$N(\varepsilon) = \max\{N_1, N_2\}$，则当$n > N$时，

$$\left| \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} - a \right| \leqslant \frac{A}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} = a.$$

例13 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$,

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}=ab$。

证 因 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$ $\therefore \{y_n\}$有界，即$\exists\ B>0$，使$|y_n|\leqslant B$

$(n=1,2,\cdots)$

记 $z_n=\dfrac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$

$$=\frac{(x_1-a)y_n+(x_2-a)y_{n-1}+\cdots+(x_n-a)y_1}{n}$$

$$+\frac{a(y_1+y_2+\cdots+y_n)}{n}=u_n+w_n$$

$\because$ $\lim\limits_{n\to\infty} w_n=ab$* $\therefore$ 只要证 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$ 即可。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, $\therefore$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, 当$n>N_1$时，

$|x_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2B}$ $\therefore$ 当$n>N_1$时，

$$|u_n|=\Bigg|\frac{(x_1-a)y_n+(x_2-a)y_{n-1}+\cdots+(x_{N_1}-a)y_{n-N_1+1}}{n}$$

$$+\frac{(x_{N_1+1}-a)y_{n-N_1}+\cdots+(x_n-a)y_1}{n}\Bigg|$$

$$\leqslant\frac{B(|x_1-a|+\cdots+|x_{N_1}-a|)}{n}+\frac{(n-N_1)B}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2B}$$

---

*这里用到极限的运算定理：常数因子可以提到极限符号之前.

$< \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$ 其中$M = B(|x_1 - a| + |x_2 - a| + \cdots$

$+ |x_{N_1} - a|)$是一个定数，若取

$N(\varepsilon) = \max\left\{N_1, \left[\frac{2M}{\varepsilon}\right]\right\}$，则当$n > N(\varepsilon)$时，

$$|u_n| < \frac{M}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 于是 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = ab$。

练习1 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = +\infty。$$

若将$+\infty$改为$-\infty$或∞，相应结论是否成立？

练习2 （加权平均值的极限）

设$\lambda_n > 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 且$\sigma_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n \to +\infty$（当$n \to \infty$） 又设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 试证：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n} = a。$$

（这是例12的推广）

练习3 （斯托兹（stolz）定理）

证明：若$\{y_n\}$递增趋于无穷大，且

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$存在，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ 存在，且

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}。$$

注意：例12与练习2都是练习3的特例。

练习4 证明：若k为自然数，则

(i) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+2^k+\cdots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{k+1},$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}=\frac{2^k}{k+1}.$$

练习5 （正数列前n项的几何平均数的极限）

证明 若$\{x_n\}$收敛且$x_n>0$ 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

（提示：利用例12、练习1的结果）

练习6 若$x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$ 且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}.$$

练习7 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\dfrac{1}{e}.$

§ 2 数列收敛性的判定Ⅰ：其他方法

在§1中，通过例题说明了按定义证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$的方法，其中包含了一些简单的技巧。这些都很基本，应当掌握。不过，这时极限值a事先已经给出，要做的事只是按定义验证a是$\{x_n\}$的极限。我们不能以此为满足。这不仅因为这种办法太原始，而且因为我们遇到的数列，它的收敛性

以及（如果收敛的话）极限值常常事先都不知道，需要我们自己去判断、寻找。针对这个问题，课本上做了进一步的讨论，得到一些其他方法：根据数列的运算法则（包括"双逼"定理）可以由某些熟知的数列的收敛性导出另一些数列的收敛性，同时极限值也可以确定；根据单调有界数列收敛定理可由数列本身的性质确定其收敛性，其极限值有时可进一步确定。本节将提供一些具体的数列，运用上述办法，解决其收敛性问题。

首先把§1讨论过的几个数列重新讨论一下。

例1 $x_n=\dfrac{n^k}{a^n}$ （$a>1$，k是确定的自然数）。

方法1

当$a=3$，$k=2$就是§1中的例8。从那里的证明，估计x_n可能收敛于零，把那里放大无穷小的过程一般化，就是：

$$0<\frac{n^k}{a^n}=\frac{n^k}{(1+\lambda)^n}\underset{(n>k)}{<}\frac{n^k}{P_{k+1}(n)}<\varphi(n)$$

其中$P_{k+1}(n)$是n的$k+1$次多项式，$\varphi(n)$是形式简单的无穷小量。如果利用"双逼"定理，就不需要为了求$N(\varepsilon)$而把$\dfrac{n^k}{P_{k+1}(n)}$进一步放大，直接由$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{P_{k+1}(n)}=0$（这是已知的）就能断定$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ （$a>1$）。

方法2

由于$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}\cdot\frac{a^n}{n^k}=\frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k\longrightarrow\frac{1}{a}<1$，

$\therefore\quad\exists N$，当$n>N$，$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$。即$x_{n+1}<x_n(n>N)$

$\therefore\quad\{x_n\}$递减，又$x_n>0$，　　$\therefore\quad\{x_n\}$有下界，因而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$存在。

现在确定极限值x，在

$x_{n+1}=\frac{x_n}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k$ 的两端取极限，得　$x=\frac{x}{a}$

$\therefore\quad(a-1)x=0$　而$a-1>0$，

$\therefore x=0$，　　即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

这里的$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{a}<1$使我们能借助于极限的保号性（推广），证明存在$N$，使当$n>N$时$x_{n+1}<x_n$，而不需具体求出$N$。

例 2　$x_n=\frac{a^n}{n!}$　$(a>1)$。

（当$a=100$，就是§1的例 9）

证　当$n\leqslant a$时，x_n上升，但项数有限。当$n>a$时，x_n的值逐渐下降，而且越靠后下降得越快，由此可猜想$x_n\longrightarrow0$。具体证明如下：

$$\because\quad\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{a^n}=\frac{a}{n+1}\longrightarrow0\quad(n\to\infty)$$

$\therefore$ $\exists N$，当 $n>N$ 时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$

$\therefore$ $x_{n+1}<x_n$ $(n>N)$ 又$x_n>0$

$\therefore$ x_n 递减有下界，

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$存在。

为确定极限值，在 $x_{n+1}=x_n\frac{a}{n+1}$两端取极限，得$x=0$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

例 3 $x_n=\sqrt[n]{a}$ $\quad$ $(a>1)$。

证 由指数函数的性质，估计 $x_n=a^{\frac{1}{n}}$ 可能收敛于1。证明如下：

$x_n=a^{\frac{1}{n}}$ 显然递减且有下界 $M=1$。因此 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n\geqslant 1$ 存在。为了确定极限值是 1（这是观察的结果），用反证法：

假设 $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n>1$，则$\exists N$，当 $n>N$时，

$x_n>\frac{1+x}{2}=\alpha>1$，由此 $a>\alpha^n$，

$\therefore$ $\frac{a}{\alpha^n}>1$ $\quad$ 令$n\to\infty$取极限，得 $0\geqslant 1$，矛盾。

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x=1$。

例 4 $x_n=\sqrt[n]{n}$。

证 $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}}=\sqrt[n(n+1)]{\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}}$

$$=\sqrt[n(n+1)]{\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}}$$

$\because$ 当 n 充分大时，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<n$（易证）

$\therefore$ 当 n 充分大时，$\frac{x_{n+1}}{x_n}<1$，

$\therefore$ x_n 递减。又 $x_n>1$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$存在，且 $x\geqslant1$。

假设$x>1$，则$\exists N$，当 $n>N, x_n=\sqrt[n]{n}>\frac{1+x}{2}=a>1$

$\therefore$ $n>a^n$ $\qquad\therefore$ $\frac{n}{a^n}>1$。（当$n>N$），令 $n\to+\infty$，取极限，得 $0\geqslant1$，矛盾，$\qquad\therefore$ $x=1$。

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

再给出一些数列供讨论。

例 5 $x_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$

似乎可以这样计算：

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}=0+0+\cdots+0=0.$$

但这不对，因为 x_n 中的项数 $2n+1$ 不确定，项数不确定的和，虽然各项极限存在，但不能按各项极限的和求和的极限，这是要注意的。

方法1 x_n 中包含 $2n+1$ 项，当 $n\to\infty$，每一项与 $\frac{1}{n}$ 极为接近，因此其和接近于2，所以 x_n 可能收敛于2，现在照这想法证明：

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}-2\right|$$

$$=\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}-\frac{1}{n}\right)+\cdots\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}-\frac{1}{n}\right|+\left|\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}-\frac{1}{n}\right|+\cdots$$

$$+\left|\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}-\frac{1}{n}\right|+\frac{1}{n}$$

$$\leqslant(2n+1)\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}\right|+\frac{1}{n}$$

$$=\frac{2n+1}{n(n+1)}+\frac{1}{n}<\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=\frac{3}{n}.$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=\left[\frac{3}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$|x_n-2|<\varepsilon$。

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2.$

方法 2 因为 x_n 共有 $2n+1$ 项，每项都介于 $\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$ 与 $\frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}}$ 之间，所以 x_n 介于 $\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}}$ 与 $\frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}}$ 之间，即 $y_n = \frac{2n+1}{\sqrt{(n+1)^2}} \leqslant x_n \leqslant \frac{2n+1}{\sqrt{n^2+1}} = z_n$.

显然，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = 2$，故由“双逼”定理知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

例 6 $x_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

与例 5 一样，x_n 有 n 项，项数不定。显然不能仿照例 5 的第一种方法处理这问题，转来照第二种方法试试。

很容易估计 x_n 的上、下限：

$$\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} < x_n < \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

这只能断定 $\{x_n\}$ 有界，不能判断它是否收敛。要想知道它收敛，再分析是否单调。

$$\because \quad x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0,$$

$\therefore$ $\{x_n\}$ 递增，又 $x_n < 1$ $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 存在。

但要确定极限值还要费点事。可利用公式

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$$

其中 C 为 Euler 常数，$\varepsilon_n\to 0$ $(n\to+\infty)$ （见《捷米多维奇习题集》146、147），具体证明如下。

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

$$=(C+\ln 2n+\varepsilon_{2n})-(C+\ln n+\varepsilon_n)$$

$$=\ln 2+\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n$$

又当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$，$\varepsilon_{2n}\to 0$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\ln 2$。

例7 设 $A>0, x_0>0$，$x_1=\frac{1}{2}\left(x_0+\frac{A}{x_0}\right)$，

$$x_2=\frac{1}{2}\left(x_1+\frac{A}{x_1}\right),\quad \cdots,\quad x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right),\ \cdots$$

讨论 $\{x_n\}$ 之收敛性。

讨论 看见 $\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{A}{x_{n-1}}\right)$，可以想起

$$\frac{1}{2}(a+b)\geqslant\sqrt{ab}$$

所以 $x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{A}{x_{n-1}}\right)\geqslant\sqrt{x_{n-1}\frac{A}{x_{n-1}}}=\sqrt{A}$

这肯定了 $\{x_n\}$ 有下界 $\sqrt{A}$。

又∵ $\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right)\Big/x_n=\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{x_n^2}\right)$

$\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{A}{A}\right)=1$， ∴$\{x_n\}$单调下降，∴ $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$存在。

（也可以证 $x_{n+1}-x_n\leqslant 0$）

在 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{A}{x_n}\right)$两端取极限，得 $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{A}{x}\right)$，又由于 $x>0$，可解得 $x=\sqrt{A}$。

∴ $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=A$。

这是计算$\sqrt{A}$（$A>0$）的逐次逼近法。

例 8 $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$，…，$x_n=\sqrt{2x_{n-1}}$，讨论$\{x_n\}$的收敛性。

方法 1 可用归纳法证$\{x_n\}$递增有上界，因而极限存在，再进一步确定其极限值。

方法 2 先证出 $x_n=2^{1-\frac{1}{2^n}}$，即可确定其极限值。

练习 1 试讨论以下数列的收敛性：

(i) $x_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重根号}}$

也可表示为：$x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$；

(ii) $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2}^{x_n}$ $(n=1, 2, \cdots)$。

练习 2　设 $x_0=1$，$x_1=1+\frac{x_0}{1+x_0}$，…，

$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，…讨论$\{x_n\}$的收敛性。

提示：由$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n+1})}$知$\{x_n\}$必定单调。

练习 3　设 $x_1=\frac{a}{2}$，$x_{n+1}=\frac{a+x_n^2}{2}$　　$(0<a<1)$

讨论$\{x_n\}$的收敛性。

提示：比较 $x_{n+1}=\frac{a+x_n^2}{2}$及 $x_{n+2}=\frac{a+x_{n+1}^2}{2}$。

（答案：练习1 （i）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$；（ii）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

练习2 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$。

练习3 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-a}$。）

从以上讨论可以看到，对于一个具体的数列，往往可以用不同的方法讨论其收敛性。我们也看到“单调有界数列必收敛”这条定理很有用。要求学生对单调性、有界性都要具体地严格证明，不能随便就说“显然成立”。

还要提醒读者，单调有界只是数列收敛的充分条件而非必要条件。充要条件以后要讲到。

数列收敛性的判定到此告一段落，我们可以小结一下，遇到这种问题，都有哪些办法可以从哪些方面考虑？

§ 3　无穷大数列

无穷大数列是一种重要的发散数列。当n趋于无穷时，它的绝对值也趋于无穷。常见的无穷大数列有$\ln n$、n^k（k是自然数），$R(n)=\dfrac{P_k(n)}{P_j(n)}$（其中$P_k(n)$、$P_j(n)$分别是$n$的$k$次及$j$次多项式，且$k>j$），$a^n$（$|a|>1$）及$n!$等。根据无穷大数列与无穷小数列的关系，由§2的例1可以得到两个重要的无穷大量，它们是$\dfrac{a^n}{n^k}$（$|a|>1$，k是自然数）及$\dfrac{n!}{a^n}$（$a\neq0$）。

按定义证明$\{x_n\}$是无穷大数列，关键在于证明对任意$M>0$，定义中的$N(M)$存在。其方法与讨论收敛数列时类似。或者直接通过解$|x_n|>M$，求出$N(M)$，或者将$|x_n|$适当缩小：$|x_n|\geqslant\psi(n)$，然后解$\psi(n)>M$，求$N(M)$。"适当缩小"的含意就是缩小后的$\psi(n)$仍是无穷大数列。具体办法与注意事项也与数列极限情形类似。由于无穷大数列问题可以转化为无穷小数列问题，这里也不需要很多的练习，只给出几个简单的题目练习一下。

练习1　按定义证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\ln n=+\infty$。

练习2　按定义证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n^3}=+\infty$。

练习3　按定义证明　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-2}{n+10}=+\infty$。

§ 4 数列的各种类型及其相互关系

在§1、2内，我们讨论了数列收敛的判定问题，在§3内，又简单讨论了无穷大数列．本节我们提出一些问题，要求通过读者自己举例，弄清各种数列（收敛数列与发散数列，有界数列与无界数列，单调数列，无穷大数列）之间的关系，反过来加深对数列收敛性的认识．

在课本中，子列的概念介绍在后，这里我们提前介绍给学生．

〔定义〕 给定数列$\{x_n\}$，若自然数列$\{n_k\}$是严格上升的，即$n_1<n_2<\cdots<n_k<n_{k+1}<\cdots$则称数列$\{x_{n_k}\}$为$\{x_n\}$的一个子列．直观地说，子列$\{x_{n_k}\}$是在数列

$$x_1,\ x_2\cdots,\ x_n\cdots$$

中，保持原来次序自左向右挑选出来的，

$$x_{n_1},\ x_{n_2}\cdots,\ x_{n_k},\ \cdots$$

这个子列的第k项是x_{n_k}．

不难证明，若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$都收敛，并且它的极限也是$a$．

由此还可以得到判定数列发散的简单方法．

1°若$\{x_n\}$有一个子列$\{x_{n_k}\}$发散，则$\{x_n\}$发散．

2°若$\{x_n\}$有两个子列分别趋于不同的极限，则$\{x_n\}$发散．

下面是供讨论的问题．

1．收敛数列必定有界，反之成立吗？

2．数列$\{x_n\}$不是递增数列的确切含意是什么？（我们把从某一项x_{n_0}之后各项递增的数列叫递增数列）

3. 数列$\{x_n\}$不递增就一定递减吗?

4. 举几个非单调地趋于零的数列，举几个非单调地趋于1的数列。

5. 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，问$\{x_n\}$一定是递增数列吗? 若是，加以证明；若不一定是，举例说明。

6. 若$\{x_n\}$中有一个子列收敛于a，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；若$\{x_n\}$同时又是单调的，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

7. 若$\{x_n\}$中有无穷多个子列都趋于a，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

（提示：若$\{x_n\}$中有一个子列趋于a，则必有无穷多个子列趋于a，因此7的条件不比6的条件多.）

8. 若$\{x_n\}$中有一个子列趋于a，又$\{x_n\}$中任一子列皆收敛，能否断定$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$?

（能，因为这时可以证明$\{x_n\}$的任一子列应收敛于a，再进一步即可证得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，证明由读者作出）

9. 按以下要求举出有界的发散数列$\{x_n\}$

(i) $\{x_n\}$有两个子列，趋于两个不同的极限；

(ii) $\{x_n\}$有三个子列，趋于三个不同的极限；

(iii) $\{x_n\}$有无穷多个子列，趋于无穷多个互不相同的极限。

10. 按以下要求举出发散数列$\{x_n\}$。

(i) 有一个子列趋于有限值a，另一个子列趋于无穷大。这种数列是否有界? 是否无穷大?

(ii) 有两个子列分别趋于$+\infty$及$-\infty$。这种数列是否无界? 是否无穷大?

§ 5 杂 题

为了巩固数列极限概念，初步掌握“$\varepsilon—N$”的证明方法，可以选择各种类型的题目，供习作课或课后练习。

1. 证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，　$a<x<b$，

则$\exists N$，当$n>N$时，$a<x_n<b$。

2. 以下命题是否正确？

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$a\leqslant x\leqslant b$，则$\exists N$，当$n>N$，$a\leqslant x_n\leqslant b$。

如果正确，加以证明，如果不正确，举例说明。

3. 若　$a<x_n<b$（当$n\geqslant n_0$），且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$存在，能否断定$a<x<b$？

对于2、3，学生不一定都能做出正确判断，如果结合极限的直观形象来考虑，则不难得出正确的结论。

4. 若　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$　且$a<b$，

则　(i) $\exists N_1$，当$n>N_1$时，$x_n<y_n$；

(ii) $\exists N_2$，当$n>N_2$时，$y_n-x_n>\dfrac{b-a}{2}>0$。

说明(i)、(ii)的几何意义。

5. 若$\{x_n+y_n\}$收敛，则关于$\{x_n\}$、$\{y_n\}$的收敛性有哪些可能？

（只有两种可能：$\{x_n\}$、$\{y_n\}$都收敛或都发散）

6. 若$\{x_ny_n\}$收敛，则关于$\{x_n\}$、$\{y_n\}$的收敛性的可能性是否与上题有相同的结论？

（提示：由$\{x_ny_n\}$收敛及$\{x_n\}$收敛能推出$\{y_n\}$一定收敛

吗？）

7. 设$\{x_n\}$是无穷大数列，$\{y_n\}$是有界数列，试证$\{x_n+y_n\}$是无穷大数列。

8. 按定义证明：若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=\infty$

（提示：由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\neq 0$推出$\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|=|a|>0$，据极限的保号性（推广）知：$\exists N_1$，当$n>N_1$时，

$|y_n|\geqslant\dfrac{|a|}{2}>0$，再继续证明）

9. 证明：若$x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

证法1 $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l>1$，$\therefore\ \exists N$，当$n>N$，$x_{n+1}/x_n>1$，又$x_n>0$，$\therefore x_{n+1}>x_n\ (n>N)$，$\therefore\{x_n\}$递增。

再证$\{x_n\}$无上界，否则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$存在且$x>x_N>0$，

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{x}{x}=1$，矛盾。

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$。

证法2 $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=l>1$，

$\therefore\ \exists N$，当$n>N$，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}>\dfrac{l+1}{2}=l_1>1$，

$\therefore$ 当$n>N$，$x_n=x_N\cdot\dfrac{x_{N+1}}{x_N}\cdot\dfrac{x_{N+2}}{x_{N+1}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{x_n}{x_{n-1}}$

$$>x_N \cdot l_1^{\,n-N}=\frac{x_N}{l_1^{\,N}} \cdot l_1^{\,n}=Ml_1^{\,n} \to +\infty \quad (n+\infty)。$$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$。

以上两种证法都用到了极限保号性定理的推广。

第三章 函数的极限

§1 函数极限的定义

数列极限与函数极限的差异仅在于自变量的类型及变化方式，前者是趋于$+\infty$的离散变量n（在数轴上跳跃地取一切自然数），后者是趋于无穷或某一定数的连续变量x（在数轴上连续地取实数值）。因此仅仅在极限定义的叙述中有所不同，在极限的性质、运算，证明方法上都很类似。在学习数列极限的基础上进而学习函数极限，应当要求读者更深刻地理解极限概念，较熟练地掌握按定义证明极限的方法。

在正课上已经明确函数极限（或无穷大量）的记法为

$$\lim_{x\to\Delta} f(x)=\bigstar$$

其中 Δ：x_0，x_0+0，x_0-0，∞，$+\infty$，$-\infty$。

$\bigstar$：A，∞，$+\infty$，$-\infty$。

搭配起来共有24种情形，正课上讲解了其中的几种，现在要求学生能准确地叙述各种情形的极限或无穷大量的定义。

例1 写出(i) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$；

(ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$； (iii) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ 的定义

并画图说明其几何意义。

要强调图象能加深对极限概念的认识，要求对于函数极限及无穷大的各种情形，都能在脑子里构成图象，不必画在纸上，就能想得清清楚楚。

例 2 以下的三种叙述能否作为函数极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$的定义？

(i) $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使$\forall x$：$|x-x_0|<\delta$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

(ii) $\forall\delta>0$，$\exists\varepsilon>0$，使$\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

(iii) 当x充分靠近x_0时，$f(x)$越来越靠近A。

(由于极限$\lim f(x)=A$已经定义，所以这里的问题是：(i)或(ii)或(iii)与极限定义是否等价？)

由(i)能推出，$A=f(x_0)$，因此(i)不能作为极限定义；凡在x_0邻域内有界的函数$f(x)$都满足(ii)，因此(ii)也不能作为极限定义；(iii)即使作为极限概念的通俗的描述也不行，因为它没有表达出极限的基本思想，"即$f(x)$可以任意靠近A，只要x充分靠近x_0(但$x\neq x_0$)。"

例 3 叙述以下各命题的含意：

(i) 当x趋于x_0时，$f(x)$不以A为极限；

(ii) 当x趋于x_0时，$f(x)$不存在(有限)极限，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在。

解 (i) $\exists\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x'$：$0>|x_0-x'|<\delta$使$|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0$。

(ii) $\forall A$，当$x\to x_0$时$f(x)$不以A为极限。详细地说是：$\forall A$，$\exists\varepsilon_0(A)>0$，$\forall\delta>0$，$\exists x'$：$0<|x'-x_0|<\delta$

使$|f(x')-A|\geqslant\varepsilon_0$.

注意：(i)与(ii)很不一样。在情形(i)，有可能$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在只是不能等于$A$；在情形(ii)，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$根本不存在（指有限极限）.

按定义证明函数极限的关键是对任意的$\varepsilon>0$，证明定义中的$\delta>0$（或$\Delta>0$）存在。对于一些简单的函数，常可具体求出δ（或Δ）的值。其中的方法、技巧与数列极限情形类似，但细节有差异。下面通过例题加以说明。

例4 按定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+1}{3x+1}=\dfrac{2}{3}$.

证法1 $\forall\varepsilon>0$，找$\Delta>0$，要求$|x|>\Delta$能使

$$\left|\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{2}{3}\right|=\frac{1}{3}\left|\frac{1}{3x+1}\right|<\varepsilon$$

试图通过解不等式，$\dfrac{1}{3}\left|\dfrac{1}{3x+1}\right|<\varepsilon$，求$\Delta$.

$$\frac{1}{3}\left|\frac{1}{3x+1}\right|<\varepsilon\underset{x\neq-\frac{1}{3}}{\Longleftrightarrow}|3x+1|>\frac{1}{3\varepsilon}$$

$$\Longleftrightarrow 3x+1>\frac{1}{3\varepsilon}\quad\text{或}\quad 3x+1<-\frac{1}{3\varepsilon}\Longleftrightarrow x>\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3}\quad\text{或}$$

$$x<-\left(\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}\right)$$

$\forall\varepsilon>0$，取$\Delta=\dfrac{1}{9\varepsilon}+\dfrac{1}{3}$，则当$|x|>\Delta$时，

$$x>\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}>\frac{1}{9\varepsilon}-\frac{1}{3} \quad 或 x<-\left(\frac{1}{9\varepsilon}+\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore \left|\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon \qquad \therefore \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+2}=\frac{2}{3}.$$

证法 2 先将$\frac{1}{3}\left|\frac{1}{3x+1}\right|$放大成更简单的无穷小$\varphi(x)$，然后解不等式$\varphi(x)<\varepsilon$，求$\Delta$。

当$|x|>1$，$\frac{1}{3}\frac{1}{|3x+1|}\leqslant\frac{1}{3(3|x|-1)}\leqslant\frac{1}{3\cdot 2|x|}=\frac{1}{6|x|}$。

$\forall\varepsilon>0$，取$\Delta=\max\left\{1,\frac{1}{6\varepsilon}\right\}$，则当$|x|>\Delta$时，

$$\left|\frac{2x+1}{3x+1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon, \quad \therefore \quad \lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+1}=\frac{2}{3}.$$

由于上述极限中自变量$x\to\infty$，因此放大过程中允许首先限制$|x|>1$。

例 5 设$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$其中$a_i$（$i=0, 1, 2, \cdots, n$）为实数，$a_0\neq 0$，$n\geqslant 1$。证明：$\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$。

证 设法把$|P(x)|$缩小为形式简单的无穷小量。

考察
$$\begin{aligned}|P(x)|&=|a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n|\\&\geqslant|a_0x^n|-(|a_1||x|^{n-1}+|a_2||x|^{n-2}\\&\quad+\cdots+|a_{n-1}||x|+|a_n|)\\&\geqslant|a_0||x|^n-(|a_1|+|a_2|+\cdots\\&\quad+|a_n|)|x|^{n-1}（当|x|\geqslant 1）\end{aligned}$$

$$=\{|a_0||x|-(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|)\}|x|^{n-1}$$

$$\geqslant\frac{|a_0|}{2}|x||x|^{n-1}\quad（当|x|>\frac{2(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|)}{|a_0|}）$$

$$=\frac{|a_0|}{2}|x|^n.$$

$\forall E>0$，要使$|P(x)|>E$，只需$|x|\geqslant1$，

$$|x|\geqslant\frac{2(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|)}{|a_0|}$$

且$\frac{|a_0|}{2}|x|^n>E$

$\therefore$可取$\Delta=\max\left\{1,\frac{2(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|)}{|a_0|},\right.$

$\left.\sqrt[n]{\frac{2E}{|a_0|}}\right\}$，则当$|x|>\Delta$时，$|P(x)|>E$

$\therefore\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)|=+\infty$。

例 6 设$f(x)=\begin{cases}x^3, & x\neq1,\\ 2, & x=1,\end{cases}$

证明 $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$。

证 当$x\neq1$时，$|f(x)-1|=|x^3-1|$
$=|x-1||x^2+x+1|$。

先设$0<|x-1|<1$，这时$|x|\leqslant|x-1|+1<2$，

$\because |x^2+x+1|<7$，于是$|f(x)-1|=|x-1||x^2+x+1|$
$\leqslant 7|x-1|$.

$\forall \varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{1，\frac{\varepsilon}{7}\right\}$，则当$0<|x-1|<\delta$

时，$|f(x)-1|<\varepsilon$，$\therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

例4—6的证法、想法与数列极限情形类似，都是先把形式较复杂的无穷小（或无穷大）放大（或缩小）为形式简单的无穷小（或无穷大），然后再通过解不等式求得定义中的δ（或Δ）。在放大（或缩小）的过程中，往往要根据需要对变量x先做一些限制（如例4证法2中先令$|x|>1$；例5证法中先令$|x|\geqslant 1$，再令

$|x|>\frac{2(|a_1|+|a_2|+\cdots\cdots+|a_n|)}{|a_0|}$；例6证法中先令

$0<|x-1|<1$）。但这种限制必须按自变量x的变化趋势来设计，不能随便限制，否则要犯错误。比方说在例6中，在证明了当$x\neq 1$时，$|f(x)-1|=|x-1||x^2+x+1|$之后，若令$|x|\leqslant 1$，则$|x^2+x+1|\leqslant 3$，要使

$|f(x)-1|\leqslant 3|x-1|<\varepsilon$只需$0<|x-1|<\frac{\varepsilon}{3}$，

取$\delta=\min\left\{1，\frac{\varepsilon}{3}\right\}$，则当$0<|x-1|<\delta$时，便有

$|f(x)-1|<\varepsilon \quad \therefore \lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

由读者分析一下：以上证法对吗？为什么？

又若直接使$|x|\leqslant 2$，可以吗？为什么？

例 7 证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x-1}=1$。

证 考察$\left|\dfrac{1}{2x-1}-1\right|=\left|\dfrac{1-2x+1}{2x-1}\right|=\dfrac{2|x-1|}{|2x-1|}$。

因为$|2x-1|=|2(x-1)+1|\geqslant 1-2|x-1|$，

所以若先限制$0<|x-1|<\dfrac{1}{4}$，则 $|2x-1|\geqslant 1-2|x-1|\geqslant 1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$，因此当$0<|x-1|<\dfrac{1}{4}$时，

$$\left|\frac{1}{2x-1}-1\right|=\frac{2|x-1|}{|2x-1|}\leqslant 4|x-1|.$$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{4},\dfrac{\varepsilon}{4}\right\}$，当$0<|x-1|<\delta$时，$\left|\dfrac{1}{2x-1}-1\right|<\varepsilon$，$\therefore\ \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x-1}=1$。

注意：在以上放大$|f(x)-A|$（即缩小$|2x-1|$）的过程中，先限制$0<|x-1|<\dfrac{1}{4}$，则得$|x-1|\geqslant\dfrac{1}{2}$。其实任取一个小于1/2的正数$\delta_1$，先限制$0<|x-1|<\delta_1$则$|2x-1|\geqslant 1-2|x-1|=1-2\delta_1=m>0$。（如果是限制$0<|x-1|<1/2$，或$0<|x-1|<1$，则不能达到以上目的）

例 8 证明 $\lim_{x\to 2}\frac{x}{4x-7}=2$。

证 考察

$$\left|\frac{x}{4x-7}-2\right|=\frac{7|x-2|}{|4x-7|},$$

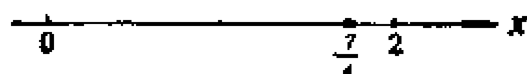


图 1

因为$\frac{1}{|4x-7|}$仅在$x=\frac{7}{4}$的邻域内无界，所以先限制

$$0<|x-2|<\frac{1}{8},\text{ 此时}$$

$$|4x-7|=|4(x-2)+1|\geqslant 1-4|x-2|\geqslant 1/2.$$

$\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left\{\frac{1}{8},\ \frac{\varepsilon}{14}\right\}$，当$0<|x-2|<\delta$时

$$\left|\frac{x}{4x-7}-2\right|<\varepsilon\quad\therefore\quad\lim_{x\to 2}\frac{x}{4x-7}=2.$$

练习 1 证明 $\lim_{x\to 0}\frac{3x+2}{2x+1}=2$。

练习 2 证明 $\lim_{x\to 1}\frac{6x+2}{8x-7}=8$。

有时证明函数极限时，还可利用已知的数列极限。

§ 2　函数极限的性质及运算法则

要求读者熟悉函数极限的各重要性质的条件和结论，理解其证明方法，并能初步运用这些方法于证明题。

如果允许利用极限的性质及运算法则，以下例 1 — 3 将不难加以证明，作为练习，我们要求按定义直接证明。

例 1（i）　若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$，且存在 $\delta>0$，当 $0>|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)\geqslant g(x)$，证明：$A\geqslant B$。

（ii）　若当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $f(x)>g(x)$ 能否推出 $A>B$？

证　用反证法证（i）

设 $A<B$，取 $\varepsilon_0=\dfrac{B-A}{2}$（为什么这么取？）

$\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，$\therefore$ 对 $\varepsilon_0>0$，$\exists\,\delta_1>0$，当 $0<|x-x_0|$ $<\delta_1$ 时，有 $A-\dfrac{B-A}{2}<A-\varepsilon_0<f(x)<A+\varepsilon_0<\dfrac{A+B}{2}$（1）

又 $\because \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$，$\therefore$ 对 $\varepsilon_0>0$，$\exists\,\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$ 时，有 $\dfrac{A+B}{2}<B-\varepsilon_0<f(x)<B+\varepsilon_0$ $=B+\dfrac{B-A}{2}$（2）。取 $\delta^*=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，当 $0<|x-x_0|$

$<\delta^*$时，(1)与(2)同时成立，因此当 $0<|x-x_0|<\delta^*$时，

$$f(x)<\frac{A+B}{2}<g(x)$$

与条件"$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$时，$f(x)\geqslant g(x)$"矛盾，这就证明了 $A\geqslant B$。

(ii) 不能推出 $A>B$，如当 $0<|x|<1$ 时

$$f(x)=x^2>x^3=g(x)$$

但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=0$ 即 $A=B$。

例 2 已知 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，求证 $\lim\limits_{x\to x_0}f^3(x)=A^3$。

证 $\because \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\therefore f(x)$在 $x=x_0$ 局部有界，即 $\exists\delta_1>0$，对任意 x，$0<|x-x_0|<\delta_1$，$|f(x)|\leqslant M$，因此当 $0<|x-x_0|<\delta_1$时，$|f^3(x)-A^3|=|f(x)-A||f^2(x)+f(x)A+A^2|\leqslant(M^2+MA+A^2)|f(x)-A|=\overline{M}|f(x)-A|$，此处$\overline{M}=M^2+MA+A^2$。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_2>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta_2$时，

$|f(x)-A|<\dfrac{\varepsilon}{\overline{M}}$，取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，则当

$0<|x-x_0|<\delta$时，$|f^3(x)-A^3|\leqslant\overline{M}|f(x)-A|<\varepsilon$，

$$\therefore \lim_{x\to x_0}f^3(x)=A^3.$$

以上例 1、2 仍属于按定义证明函数极限的练习。

按定义证明函数极限不存在（或不是无穷大）叙述较麻烦，若利用函数极限与数列极限的关系，就较方便。如以下例 3、例 4。

例 3 证明狄里克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数,}\end{cases}$$

在任何点x_0极限均不存在。

例 4 证明函数$f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$在$x=0$的任何邻域内均无界，但当$x\to 0$时，$f(x)$不是无穷大量，并画图作出直观解释。

例 3、4 证明从略。

利用函数极限的运算定理求极限的练习可留作习题，这里只举几个例题。

例 5 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$不存在。

问：(i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在吗？

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot g(x)$ 存在吗？

证 (i) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在。不然，假设

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 存在，再由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在则推出$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}[(f(x)+g(x))-f(x)]$存在，与已知条件矛盾。$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$ 不存在。

(ii) 下边证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$也不存在。注意检查证法是否正确。

假设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)g(x)$存在，则由$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，推出

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)\ g(x)}{f(x)}$存在，与已知条件矛盾，故

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$不存在。

上面证明中用了哪条运算定理？这条运算定理的条件是什么？此处条件都满足吗？

如果一个条件不满足，则证明不能成立。于是有两种可能：结论对，但要另找证法；结论错，那就要用反例说明，反例要从那个不具备的条件去想。

例 6 求 $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$。

解 $\because$ 当 $x\to 0$ 时，$\left[\frac{1}{x}\right]\to\infty$ $\therefore$ 不能直接利用运算定理来解决，可这样计算：

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0} x\left\{\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{1-x\left(\frac{1}{x}\right)\right\}=1,$$

其中$\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$是$\frac{1}{x}$的小数部分，于是

$0\leqslant\left(\frac{1}{x}\right)<1$，故$\left(\frac{1}{x}\right)$是有界量。

例 7 考察 $y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]$在 $x=\frac{1}{n}$之左右极限（此处 n 是正整数）。

解法 1

$$y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\begin{cases}\frac{1}{x}-n, & \text{当}\ \frac{1}{n+1}<x<\frac{1}{n},\\ \frac{1}{x}-(n-1, & \text{当}\ \frac{1}{n}<x<\frac{1}{n-1},\end{cases}$$

$\therefore$ 当 $x\to\frac{1}{n}+0$ 时，$y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\to n-(n-1)=1$，

当 $x\to\frac{1}{n}-0$ 时，$y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\to n-n=0$。

解法 2

$$y=\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]=\left(\frac{1}{x}\right)$$

由小数部分定义知：

$$(x)=\begin{cases}1-\delta, & n-1<x=n-\delta<n,\\ \delta, & n<x=n+\delta<n+1,\end{cases}$$

$$\therefore \lim_{x\to n-0}(x)=1,\quad \lim_{x\to n+0}(x)=0,$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{1}{n}+0}\left(\frac{1}{x}\right)=1,\quad \lim_{x\to\frac{1}{n}-0}\frac{1}{x}=0.$$

§ 3　函数极限（待定型）的确定

待定型极限的确定是极限计算的难点，因为它不能直接

利用运算定理来确定，又没有一般方法可循。不过我们已经熟知若干重要且常见的待定型的极限（列在后面），因此常常可以通过恒等变形，将所求待定型极限化归为已知的待定型极限。这是确定待定型极限的一个途径。此外，对于$\frac{0}{0}$型的待定型，有时也将分子分母分解因式，设法约去一个极限为零的公因式，使问题简化或得以解决。

目前是初次接触待定型(在数列极限遇见过$\frac{\infty}{\infty}$，$\infty-\infty$，∞^0型的待定型)，后面掌握了导数这个工具之后，还会介绍确定待定型极限的或许是更好的办法。

习作课上安排一些题目，主要由同学练习、讨论，教师可适当作一小结。

以下几个常见的待定型极限要求读者熟记。其中(a)，(e)是最基本的，其余可由(a)、(e)推出。((i)可直接计算)

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$；($b$) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{x}=1$，

(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}x}{x}=1$；($d$) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$；

(e) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$；($f$) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$；

(g) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$；($h$) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$；

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\dfrac{1}{2}$；(j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$

($a>0$)．

由以上诸极限可知：当 $x\to 0$ 时， x，$\sin x$，$\operatorname{tg}x$，$\operatorname{arctg}x$，$\ln(1+x)$，e^x-1 都是彼此等价的无穷小量；而 $1-\cos x$ 与 $\dfrac{1}{2}x^2$ 等价。

例 1 试确定 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 其中 $P(x)$，$Q(x)$ 均为 x 的多项式，且 $P(x_0)=Q(x_0)$。

解 设 x_0 分别是 $P(x)$，$Q(x)$ 的 m 重根和 n 重根，于是

$$P(x)=(x-x_0)^m P_1(x)$$
$$Q(x)=(x-x_0)^n Q_1(x)$$

且 $P_1(x_0)\neq 0$，$Q_1(x_0)\neq 0$，然后根据 $m\gtreqless n$ 之不同，分三种情形进行讨论。

这样，有理分式 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 当 $x\to x_0$ 时的极限原则上得到解决。

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 也可确定。（作为练习）

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+x^2+\cdots\cdots+x^n-n}{x-1}$．

（提示：将分子分解因式，答案：$\dfrac{n(n+1)}{2}$）

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$（$n$ 为正整数）

解法 1 将分子有理化，再约去极限为零的公因式 x。

解法 2 作变量代换 $t=\sqrt[n]{1+x}$，将整个待定型有理化，再进一步求解。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots\cdots+t+1)}$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{1+t+t^2+\cdots\cdots+t^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

例 4 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[n]{x}-1}{\sqrt[m]{x}-1}$ （m、n 均为正整数）

提示：仿例 3 的两种解法。答案：$\dfrac{n}{m}$。

例 5 $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

答案：-2。

例 6 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sqrt{1+x}-1}$.

解 可作恒等变形再利用已知极限计算

$$\sin_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}4\ \frac{\operatorname{arctg}2x}{2x}\cdot\frac{x/2}{\sqrt{1+x}-1}=4.$$

或将分子、分母用它们的等价无穷小代替：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}2x}{\sqrt{1+x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\frac{x}{2}}=4。$$

在计算$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限过程中，如果分子或分母是若干个式子的乘积，则其中的每个因式都可以用其等价无穷小代替；如果分子或分母含有不止一项，那么是否可以将其中的一项代之以等价无穷小呢？

例 7　求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}$。

先看以下解法：

$\because$ 当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\operatorname{tg}x\sim x$，

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0。$$

试分析以上解法是否正确，如何改正？

（答案：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg}x}{x^3}=-\frac{1}{2}$）

最后安排几个利用已知极限确定待定型极限的练习。

练习 1　$\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}$（$m$、$n$为整数且$n\neq 0$）。

练习 2　$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)-\sin a}{x^2}$。

练习 3　$\lim\limits_{x\to +\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$。

练习 4　$\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$。

（提示：做变换$x=\frac{\pi}{2}-y$）

练习 5　$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}-\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\ (a>0)$。

练习 6　$\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}\qquad (a>0)$。

练习 7　$\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}\qquad (a>0)$。

练习 8　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+xe^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$。

练习 9　$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$。

练习10　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+2}}$。

答案：（练习 1）：$(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$。（练习 2）：$-\sin a$。

（练习 3）：0。（练习 4）：1。（练习 5）：$\frac{1}{\sqrt{2a}}$。

（练习6）：$\frac{1}{a}$。（练习7）：a^a。（练习8）：1。

（练习9）：3/2。（练习10）：1。

第四章　连续函数

§1　连续与间断

在本节内，我们将通过例题及练习，使读者加深对连续概念的理解，掌握讨论函数连续性的办法，进一步熟悉"$\varepsilon-\delta$"的证明方法。

首先举几个研究函数连续性的例题。所谓研究函数$f: X\to \mathbf{R}$的连续性，就是要区分出f在其定义域X内的连续点与间断点，并指出间断点的类型。办法就是考察函数f在X上每点处的极限。

我们知道，一切初等函数在其定义域内连续。注意到这一点，在研究初等函数的连续性时，只需考察这样的点x_0：f在x_0没有定义，但在x_0的某邻域内有定义。

例1　研究函数$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$的连续性并画出f之图象。

解　由初等函数的连续性知：f在$x\neq 1$连续。

又　$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$，

$\therefore$　$x=1$是f的可去间断点。（图2）

例 2 研究函数$(x)=x\sin\frac{1}{x}$的连续性并画出f的图象。

解 由初等函数的连续性知，f在$x\neq 0$连续。

又 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$，$\therefore$ $x=0$是f的可去间断点。（图 3）

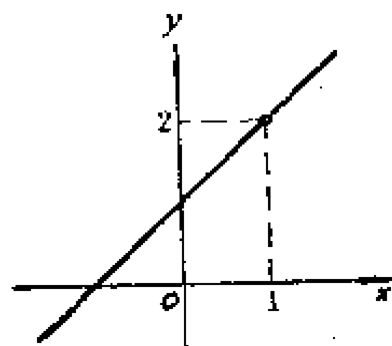


图 2

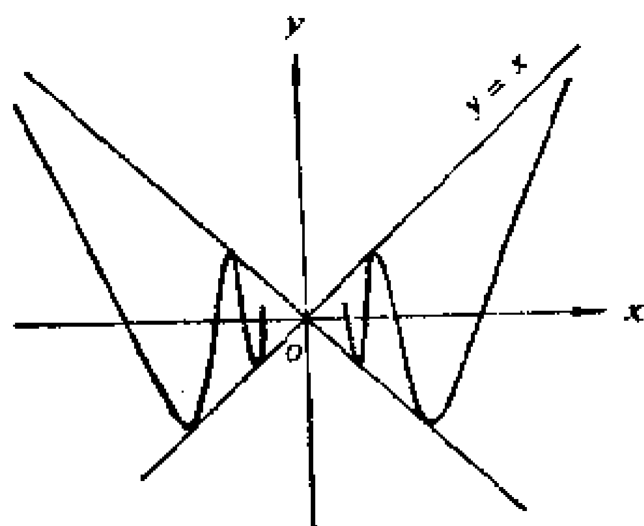


图 3

例 3 研究函数$f(x)=\frac{x}{|x|}$的连续性并画出f的图象。

解 函数f也可表示为：

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x>0, \\ -1, & \text{当}x<0,\end{cases}$$

因此在$x\neq 0$，f连续，又 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-1$， $\therefore x=0$ 是 f 的第一类间断点。（图 4）

例 4　研究函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}, & 当x\neq 0\\ 0\quad , & 当x=0\end{cases}$

的连续性，并画出 f 的图象。

解　(i)由初等函数的连续性知，f 在$x\neq 0$，1连续。

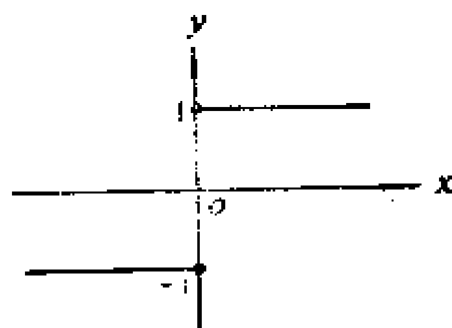


图　4

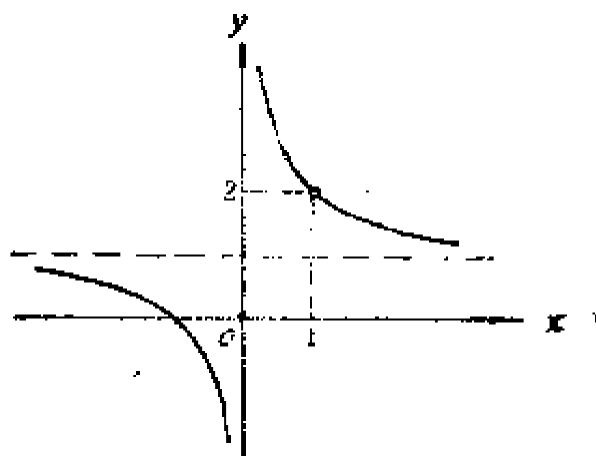


图　5

(ii) $\because\quad \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x}$

$=2$　$\therefore$　$x=1$是f的可去间断点。

(iii) $f(0)=0$　但　$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}=\infty$，

$\therefore$　$x=0$ 是 f 的第二类间断点。

f 之略图如图 5 。

例 5　研究　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 当\ x\neq 0\\ 0\quad , & 当\ x=0\end{cases}$

的连续性，并画出其草图。

解 (i) 当 $x_0 \neq 0$，$f(x)$在x_0连续。

(ii) 当 $x_0 = 0$，取$x_n = \dfrac{1}{2n\pi - \pi/2}$，

则$x_n \to 0$，$f(x_n) = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \to +\infty$ （当$n \to +\infty$）

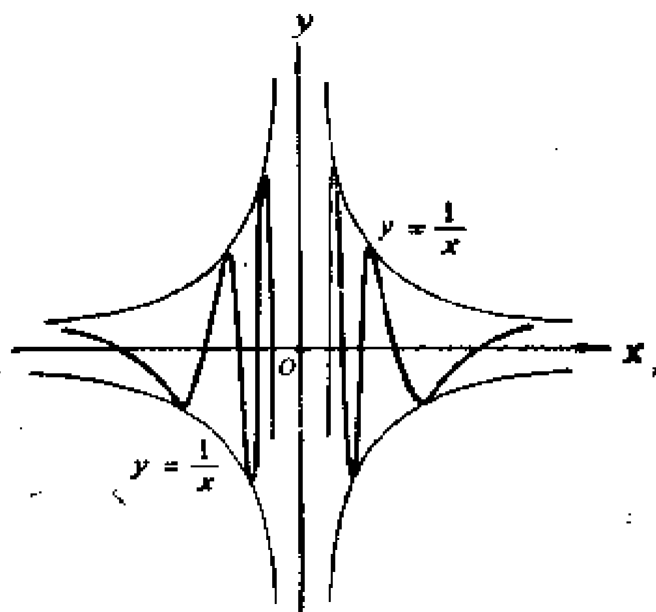


图 6

$\therefore$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$不存在 $\therefore$ $x_0 = 0$是f的第二类间断点。

f之略图如图6。

例6 研究函数$f(x) = \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x^2}}$的连续性。

解 (i)当 $x_0 \neq \pm\sqrt{\dfrac{1}{k\pi}}$ （k为自然数）

且 $x_0 \neq 0$，f在x_0连续。

(ii) 当 $x_0=0$，$f(0)$无定义。

取 $x_n=\sqrt{\frac{1}{n\pi}}$，∵ $\sin\frac{1}{x_n}=\sin\sqrt{n\pi}\neq 0$，

$\sin\frac{1}{x_n^2}=\sin n\pi=0$，∴ f 在每个点x_n无界**$(n=1,2,\cdots)$。

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，∴ f 在$x=0$无界。（为什么？）

故 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，∴$x_0=0$是 f 的第二类间断点。

(iii) $x_k=\pm\sqrt{\frac{1}{k\pi}}$ （k 为自然数）

(ii) 中已证出 f 在 x_k 无界，故 $\lim\limits_{x\to x_k}f(x)$不存在，

∴ $x_k=\pm\sqrt{\frac{1}{k\pi}}$ （k为自然数）是f的第二类间断点。

例 7 研究函数$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x & (x\text{ 为有理数})\\ 0 & (x\text{ 为无理数})\end{cases}$ 的连续性。

解 (i) 当 $x_0\neq m$（m为整数）在x_0之右侧取有理数列$\{p_n\}$及无理数列$\{q_n\}$，使当 $n\to\infty$，$p_n\to x_0$，$q_n\to x_0$，于是有 $f(p_n)=\sin\pi p_n\to\sin\pi x_0\neq 0$，

$f(q_n)=0$。

∴ $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$不存在，因此$x_0\neq m$是 f 的第二类间断点。

(ii) 当 $x_0=m$，考察$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|$
$\leqslant|\sin\pi x|=|\sin\pi x-\sin\pi x_0|\leqslant\pi|x-x_0|$

** f在点$x=a$无界，指f在$x=a$之任何邻域内无界。

$\forall \varepsilon>0$，　$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{\pi}$，当　$|x-x_0|<\delta$时，

$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，$\therefore$　$x_0=m$　是 f 的连续点。

练习1　研究$f(x)=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{2} & (|x|\leqslant 1)\\ |x-1| & (|x|>1)\end{cases}$的连续性。

（答：$x_0=-1$是第一类间断点，其余皆为连续点。）

练习2　研究$f(x)=\left[\frac{1}{x}\right]$的连续性。

（答：$x=0$是f的第二类间断点；$x=\frac{1}{m}$是 f 的第一类间断点，其中m是非零整数；其余皆为连续点）

练习3　研究$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$的连续性。

（答：$x_k=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$是 f 的第一类间断点，其中k为整数）

观察以上例1—7，发现例1—6中的函数有有限个或无穷多个孤立的间断点，而在被间断点隔开的各个区间上，函数都是连续的。这些函数都很普通，图形也不难画出。（例1、2的草图已画出）但例7很新鲜，这个函数有些“异常”：它有无穷多个孤立的连续点，而在被这些连续点隔开的每个开区间内，函数是处处间断的。我们已经见过在整个数轴上处处间断的函数（Dirichlet函数），因此对函数在

一个个区间内处处间断并不奇怪。但对于函数在这些区间的端点却又连续这一点可能不易理解。初次接触连续概念的学生，容易从直观上产生一种印象，似乎"函数在点x_0连续，必在其附近也连续。"例 7 证明这种印象与实际不符。对例 7 中的函数来说，在每个连续点的附近，函数都是间断的的。这说明从函数 f 在点x_0连续不能推出 f 在 x_0附近连续。这也是我们所强调的连续概念的局部性。

例 7 中的函数显然可表示为$\sin\pi x$ 与Dirichlet函数$D(x)$的积：$f(x)=\sin\pi x\cdot D(x)$，它的图象不能完全画出，但可以这样描述：在连续曲线$y=\sin\pi x$上，与有理数 x 对应的点$(x, \sin\pi x)$不动，与无理数 x 对应的点沿着与 y 轴平行的方向移到x轴上，所得即为f的图象。这样，$\sin\pi x$ 的零点是 f 的连续点，其余的点是 f 的第二类间断点。

作为练习，可举出具有以下性质之一的函数。

(1) 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，仅在$x=0$连续；

(2) 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，有且仅有n个连续点(n为自然数)；

(3) 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，仅在$x_m=m$ $(m=0, \pm1, \pm2, \cdots)$连续（例 7 可以吗？）；

(4) 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，仅在$x_m=\frac{1}{m}(m=\pm1, \pm2, \cdots)$ 连续。

然后证明一个命题：

设 φ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$连续，$f(x)=\varphi(x)D(x)\quad(x\in\mathbf{R})$

其中D为狄利克雷（Dirichlet）函数，则φ的零点是f的连续点，其余的点（使$\varphi(x_0)\neq0$的点x_0）是f的第二类间断点。

命题是例 7 的一般化，可采用与例 7 类似的方法来证明。

下面例 8 中函数间断点的分布更为复杂，直观上不易想象，证明也略为困难。

例 8 研究黎曼（Riemann）函数的连续性。

$$f(x)=\begin{cases}1/q & \text{当}x=p/q\ (p,q\text{是互质的正整数})\\ 0 & \text{当}x\text{是正无理数}\end{cases}$$

解 f之定义域为 $(0,\ +\infty)$

当x_0为正有理数：$x_0=\dfrac{p}{q}$，则$f(x_0)=\dfrac{1}{q}>0$

取正无理数列$\{x_n\}$：$x_n\to x_0$，于是$f(x_n)=0$

∴ x_0是f的间断点。

当x_0为正无理数，则$f(x_0)=0$。

$\forall\varepsilon>0$，有自然数q_0，当$q>q_0$时，$\dfrac{1}{q}<\varepsilon$，因此使$\dfrac{1}{q}\geqslant\varepsilon$的自然数仅有有限个，不妨设它们就是 1，2，…，$q_0$。在 $(x_0-1,\ x_0+1)$ 内以 1，2，…，q_0为分母的既约分数总共有有限个，（当然不会是x_0），因此存在x_0之δ邻域 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，其中不含上述既约分数，于是，若 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，则

或者x为无理数，于是$f(x)=0$，

或者x为有理数，则$x=\dfrac{p}{q}$（p,q 互质且 $q>q_0$），于是

$f(x)=\dfrac{1}{q}<\varepsilon$。

总之，当$|x-x_0|<\delta$时，$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)|<\varepsilon$，
$\therefore f$在x_0连续。

上面的证明中，实际上证明了当既约分数$x=\frac{p}{q}\to x_0$（其中x_0为无理数）时，$q\to+\infty$。从证明的过程中还可以看到，当x_0为有理数时，结论也成立。利用这一点，可以证明函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1+p^2}{1+q^2}}，当x=p/q，（p、q是互质的正整数）\\ x， \quad 当x是正无理数。\end{cases}$$

（它在$(0,+\infty)$上有意义）
在正无理点以及$x_0=1$连续，而在其余的正有理点间断。（练习）

最后安排几个有关连续性的理论题供作练习，它们的证明并不困难，但注意要考虑周密，不出漏洞，叙述要条理清晰。

练习 4 证明：若f在I上连续，且f在I上所有有理点处其值为零，则f在I上恒为零。

（只需证f在每个无理点处其值为零。为此利用f的连续性。）

练习 5 设f定义在$(-\infty, +\infty)$上且在$x=0$连续，满足$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$（称为可加性条件），证明：f在$(-\infty, +\infty)$上连续，且为线性函数。

（先利用f之可加性条件证明$f(r)=f(1)r$，其中r为有理数；再由f在$x=0$连续及可加性条件证明f在$(-\infty, +\infty)$上连续；最后证出$f(x)=f(1)x$，$-\infty<x<+\infty$）

练习 6 设f定义在区间I上且f在I上的间断点皆为可去间断点，定义

$$g(x)=\lim_{t\to x}f(t) \qquad (x\in I)$$

证明：g在I上连续。

证 $\forall a\in I$，$\because$ $g(a)=\lim\limits_{t\to a}f(t)$，

$\therefore$ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta(a)>0$，$\forall t$：$0<|t-a|<\delta(a)$，$|f(t)-g(a)|<\varepsilon$，于是对每个$x\in O_{\delta(a)}(a)$*有x之充分小邻域$O_{\delta_1}(x)\subset O_{\delta(a)}(a)$。当$t\in O_{\delta_1}(x)$时，$|f(t)-g(a)|<\varepsilon$。在以上不等式内，令$t\to x$取极限，便得：$|g(x)-g(a)|\leqslant\varepsilon$。当$x\in O_{\delta(a)}(a)$又上式对$x=a$显然成立，

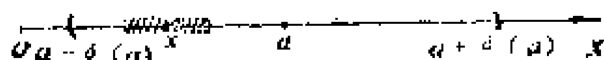


图 7

$\therefore$ $\forall x$，$|x-a|<\delta(a)$，有$|g(x)-g(a)|\leqslant\varepsilon$，$\therefore$ g在$x=a$连续，因而在I连续。

§ 2 一致连续性

函数的连续性是一个局部性的概念。当我们说函数f在I上连续时，只是说f在I上每一点皆连续，而f在I上一致连续的定义显然是一个整体性的概念。

一般说，f在I上连续不能导致f在I上一致连续，而当I是闭区间时却可以这样。这是由于闭区间$[a, b]$具有某种特殊的性质（通常叫做紧性）。对于其他类型的区间I，

(*) 此处$O_{\delta(a)}(a)$为点a的空心邻域

在它上面连续的函数是否具有一致连续性就需要进行具体分析。最基本的方法是按一致连续性的定义来检验，下面先举几个例题。

例 1 证明 $f(x)=2\sin x-\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续。

证 利用三角函数和差化积公式易证 $\forall x_1, x_2\in(-\infty, +\infty)$，有 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant 3|x_1-x_2|$

$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，$\forall x_1, x_2$：$|x_1-x_2|<\delta$

有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，因而 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致连续。

例 2 **证明** $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 一致连续。

证明 考察 $|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\dfrac{\sin x_1}{x_1}-\dfrac{\sin x_2}{x_2}\right|$，发现需要研究 f 在 $x\to 0+0$ 及 $x\to+\infty$ 时的性态。

$$\because\quad \lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$\therefore$ $x=0$ 是 f 的可去间断点（右侧），考虑函数

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} f(x) & x>0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

则 $\bar{f}$ 在 $x\geqslant 0$ 连续，因而在任何有限区间 $[0, A]$ 上一致连续，因此 f 在任何有限区间 $(0, A)$ 上一致连续 $(A>0)$。

又 $\because$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，$\therefore$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists \Delta>0$，

$\forall x \geqslant \Delta$，有$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| > \varepsilon/4$，∴ $\forall x_1, x_2 \in [\Delta, +\infty)$ 有

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| < \varepsilon/2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(A)}$$

又 f 在$(0, \Delta]$ 上一致连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，$\forall x_1, x_2 \in (0, \Delta]$，$|x_1 - x_2| < \delta$，有

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| < \varepsilon/2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(B)}$$

于是 $\forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$，只要$|x_1 - x_2| < \delta$

当$x_1, x_2 \in [\Delta, +\infty)$，由(A)知：

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| < \varepsilon/2$$

当$x_1, x_2 \in (0, \Delta]$ 由(B)知：

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| < \varepsilon/2$$

当$x_1 \in (0, \Delta]$，$x_2 \in [\Delta, +\infty)$ 则

$$\left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| \leqslant \left|\frac{\sin x_1}{x_1} - \frac{\sin \Delta}{\Delta}\right| + \left|\frac{\sin \Delta}{\Delta} - \frac{\sin x_2}{x_2}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

总有$\left|\dfrac{\sin x_1}{x_1} - \dfrac{\sin x_2}{x_2}\right| < \varepsilon$ ∴ f在$(0, +\infty)$上一致连续。

分析例 2 的证明，我们看到由f在无穷开区间$(0, +\infty)$

内的连续性导出其一致连续性，主要利用了 f 本身的性质：当 $x\to 0+0$ 或 $x\to+\infty$ 时 f 之（单侧）极限存在。（当然还利用了闭区间上连续函数的一致连续性）由此不难得出使得在开区间（有穷或无穷）内连续函数成为一致连续的一个充分条件**：在开区间的两端点（左端点可以是 $-\infty$，右端点可以是 $+\infty$），f 之单侧极限存在。作为练习，由学生写出完整的定理并加以证明。今后还可以用这个定理判断开区间上连续函数的一致连续性，而不必都按定义证明。

例 3　证明函数 $f(x)=x^2$

(i) 在 $(-l,\ l)$ 上一致连续；

(ii) 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上不一致连续。

证　(i)　$\because$ f 在 $[-l,\ l]$ 上一致连续，因此在 $(-l,\ l)$ 上一致连续。

(ii) 取 $x'_n=n+\frac{1}{n}$，$x''_n=n$　$(n\geqslant 1)$

则 $|x'_n-x''_n|=\frac{1}{n}\to 0$ $(n\to\infty)$ 但 $|f(x'_n)-f(x''_n)|$

$=|n^2+2+\frac{1}{n^2}-n^2|=2+\frac{1}{n^2}>2$

取 $\varepsilon_0=2$，$\forall\delta>0$，$\exists n_0$ 使 $|x'_{n_0}-x''_{n_0}|=\frac{1}{n_0}<\delta$，但 $|f(x'_{n_0})-f(x''_{n_0})|>\varepsilon_0$　$\therefore f$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 上不一致连续。

** 对于有限区间，这个条件还是必要的，其证明要用到柯西收敛原理（见第五章）。对于无穷区间，这个条件不是必要的，请举出反例。

例 4　证明函数$f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$在（0，1）不一致连续。

证　取$x'_n=\frac{1}{2n\pi}$，　$x''_n=\frac{1}{(2n+1)\pi}$

则 $|x'_n-x''_n|=\frac{1}{2n(2n+1)\pi}\longrightarrow 0\quad(n\to\infty)$

但$|f(x'_n)-f(x''_n)|=e^{\frac{1}{2n\pi}}+e^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}>2$

取$\varepsilon_0=2$，$\forall\delta>0$，$\exists n_0$使

$$|x'_{n_0}-x''_{n_0}|=\frac{1}{2n_0(2n_0+1)\pi}<\delta$$

但$|f(x'_{n_0})-f(x''_{n_0})|\geqslant\varepsilon_0$ ∴ f在（0，1）不一致连续。

再安排几个与一致连续性有关的练习。

练习 1　证明f在I上不一致连续的充要条件是：存在点列$\{x'_n\}$，$\{x''_n\}\subset I$，使$\lim\limits_{n\to\infty}(x'_n-x''_n)=0$，但当$n\to+\infty$，$[f(x'_n)-f(x''_n)]\not\to 0$。

练习 2　证明$f(x)=\sqrt{x}$在$[0，+\infty)$上一致连续。

由此看出，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$存在不是$f$在$[a，+\infty)$上一致连续的必要条件。

练习 3　证明$f(x)=x\sin x$在$[0，+\infty)$上不一致连续。

练习 4　若f、g在区间I上都是一致连续的，问$f\pm g$，fg在I上一致连续吗？

提示：考虑乘积fg时，要分别就I是有界区间及I是无界区间两种情形进行讨论。

练习 5　证明若函数 f 在有界区间 I 上一致连续，则 f 在I上有界。若I为无界区间，结论还对吗？

提示：无界区间情形，考虑函数

$f(x)=x \quad (-\infty<x<+\infty)$。

练习 6　设f在 $[a, +\infty)$ 连续，且当$x\to+\infty$时，$y=f(x)$以直线$y=cx+d$为渐近线，即满足

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(cx+d)]=0$$

则 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续。

提示：方法 1　按一致连续的"$\varepsilon—\delta$"定义证。

方法 2　先考虑函数$\varphi(x)=f(x)-(cx+d)$的一致连续性，再利用练习 4 的结论。

最后看一致连续性定理的一个证明，由学生检查它是否正确。

设 f 在 $[a, b]$ 上连续，试证 f 在 $[a, b]$ 一致连续。

试图采用反证法，证明如下：

假设f在 $[a, b]$ 上不一致连续，则$\exists\ \varepsilon_0>0$，$\forall\delta_1>0$，$\exists\ x_1, x_2\in[a,b]$且$|x_1-x_2|<\delta_1$但$|f(x_1)-f(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$……(1)

又f在x_2连续，对$\varepsilon_0>0$，$\exists\ \delta>0$，

$\forall x\in[a, b]$：$|x-x_2|<\delta$　有$|f(x)-f(x_2)|<\varepsilon_0$……(2)

由于δ_1任意，取$\delta_1=\delta$，此时$|x_1-x_2|<\delta_1$，

因此$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon_0$……………………………………(3)

(3)与(1)矛盾，因此 f 在$[a, b]$一致连续。

§ 3 连续函数的性质

连续函数是一类重要的函数。可以说，数学分析中研究的函数基本上是连续函数。因此连续函数的性质自然是我们所关心的。我们已经知道闭区间 $[a, b]$ 上连续函数的性质，在 § 2 还做了有关一致连续性的练习，并且得出在开区间上的连续函数成为一致连续的一个充分条件。同样，对开区间 (a, b) 上的连续函数 f，也可以加上某些条件之后，使其它性质（如有界性、达到最大或最小值、介值性）得以保持。究竟需要加上什么条件，希望由读者自己试着回答。不妨先画一些图形，通过观察、分析、概括出所需要的条件，然后写出完整的命题，最后加以证明。也可安排在习作课上进行讨论，但尽可能由读者自己作出解答。

下面我们给出这个问题的一些回答仅作为参考。

结论 1 设 I 为区间（I 可以开、闭、半开等），左端点是 a(可能是 $-\infty$)，右端点是 b(可能是 $+\infty$)，f 在 I 连续，又 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=B$(其中 A、B 可能是 $-\infty$ 或 $+\infty$) 且 $A<B$（约定 $-\infty<$ 实数 $\alpha<+\infty$）则对任意实数 $c\in(A, B)$，有 $x_0\in I$，使 $f(x_0)=c$。

证明 由于 $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)<c<\lim\limits_{x\to b-0}f(x)$

$\therefore$ 在 I 上存在 x_1（a 之右侧附近）及 x_2（b 之左侧附近），使 $f(x_1)<c<f(x_2)$，然后由通常的介值定理知，存在 $x_0\in(x_1, x_2)\subset I$，使 $f(x_0)=c$。

由此看出，f 的"介值性"的关键在于 I 是区间，至于

什么样的区间无关紧要，区间的特征是"连通性"，即"$\forall x_1, x_2 \in I$，有$[x_1, x_2] \subset I$"也可以利用这个性质给出区间的一般定义。

结论2 设函数$f: I \to \mathbf{R}$连续，其中I是区间。a，b分别是I之左、右端点（注意：a、b不一定属于I）且极限$\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$及$\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$都存在（注意不能是$+\infty$或$-\infty$），则$f$在$I$上有界。（证略，注意$a$可能是$-\infty$，$b$可能是$+\infty$）

结论3 若f在(a, b)连续，且$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$，则$f$在$(a, b)$上可取得最小值（$(a, b)$可能是无穷区间）。

证明 由于$\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +\infty$，

取$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，则$\exists \delta_1 > 0$，$\forall x$：$a < x < a+\delta_1$，有$f(x) > f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，且$\exists \delta_2 > 0$，$\forall x$：$b-\delta_2 < x < b$，有$f(x) > f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，

可取δ_1，δ_2充分小，使$\dfrac{a+b}{2} \in [a+\delta_1, b-\delta_2]$

而f在$[a+\delta_1, b-\delta_2]$上连续，因而可取得最小值，即$f(c) = \min\limits_{a+\delta_1 \leq x \leq b-\delta_2} \{f(x)\}$ $\quad \therefore \forall x \in [a+\delta_1, b-\delta_2]$

有$f(x) \geqslant f(c)$，特别地有$f(c) \leqslant f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$，

于是当$x \in (a, a+\delta_1)$或$x \in (b-\delta_2, b)$时，有

$$f(x) > f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant f(c) \qquad \therefore f(c) = \min_{a<x<b}\{f(x)\}$$

即f在(a, b)可取得最小值$f(c)$。

（关于最大值有类似定理；对于无界区间，结论也成立）

结论4 若f在(a, b)连续，且$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=l$，则$\min\limits_{a<x<b}\{f(x)\}$，$\max\limits_{a<x<b}\{f(x)\}$至少有一个存在。

（若区间(a, b)为无穷区间，则结论也成立，证略）

下面安排一些理论题，前两个是介值定理的深化，后几个属于连续函数性质的应用。注意在构思证明时要借助于直观，但不可把直观当作证明的根据。

例1 若f在区间I具有介值性，且f在I单调，则在I连续。

证 采取反证法。设存在$x_0\in I$，f在x_0间断。$\because f$在I单调（不妨设f在I上不减）。$\therefore x_0$是第一类间断点，$\therefore f(x_0-0)<f(x_0+0)$。

$\therefore f$不可能取得$(f(x_0-0), f(x_0+0))$内异于$f(x_0)$的值。这与f的介值性矛盾（为什么？）$\therefore f$在I连续。

例2 若f在区间I连续，则集合

$$f(I)=\{f(x)|x\in I\}$$

是区间。

证 按区间的一般定义，只需证：若$c_1, c_2\in f(I)$，则$[c_1, c_2]\subset f(I)$，（这里设$c_1<c_2$）

$\because c_1, c_2\in f(I)$ $\therefore$ 存在$x_1, x_2\in I$，使$f(x_1)=c_1$，$f(x_2)=c_2$，根据介值定理，对任何$c\in(c_1, c_2)$，必有$x\in(x_1, x_2)\subset I$或$x\in(x_2, x_1)\subset I$，使$f(x)=c$，即$c\in f(I)$

$\therefore[c_1, c_2]\subset f(I)$。

练习1 设$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$

是实系数多项式，证明：

1°当n为奇数时，$P_n(x)$至少有一实根；

2°当n为偶数时，$P_n(x)$能取得最小值.

（提示：考虑当$x\to+\infty$及$x\to-\infty$时，$P_n(x)$的变化趋势，然后分别利用结论1（当n为奇数时）及结论3（当n为偶数时）.

练习 2 证明每一非负实数有唯一的算术平方根，即设$a\geq0$，则存在唯一的非负实数x，使$x^2=a$。

（当$a=0$，结论显然成立；当$a>0$时，考虑$P_2(x)=x^2-a$ $0<x<+\infty$）。

练习 3 设f在区间I连续，且f在I上取值皆为有理数，问f是怎样的函数？

练习 4 试证明，若f在$[a, b]$连续，且$\forall x\in[a, b]$，$f(x)\in[a, b]$，则f在$[a, b]$中必有一个不动点，即$\exists x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=x_0$，并说明结论的几何意义，此不动点x_0唯一吗？

（提示：设$F(x)=f(x)-x$ 考察$F(a)$及$F(b)$的符号，由介值定理即证得. 几何意义如图，不动点x_0不一定唯一。）

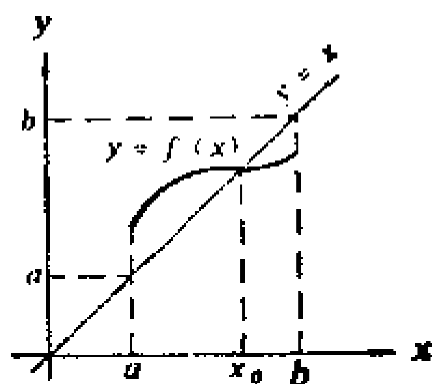


图 8

练习 5 设$P_n(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\cdots+a_1x+a_0$是实系数多项式，证明：$|P_n(x)|$能取得最小值.

（提示：$|P_n(x)|$在$(-\infty, +\infty)$连续，分别考虑当

$x\to-\infty$及$x\to+\infty$时，$|P_n(x)|$的变化趋势）

练习 6　设f在$[0,1]$连续，且$f(0)=f(1)$。试证明：对任意自然数n，$\exists\, x_0\in\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right]$，使$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)$。

（提示：令$g(x)=f(x)-f\left(x+\frac{1}{n}\right)$，只要证$g$在$\left[0,\ 1-\frac{1}{n}\right]$上有零点即可。可用反证法证明）

第五章　关于实数的基本定理及闭区间上连续函数性质的证明

先将课上讲述的内容小结一下。

1．承认了下述事实：实数系是存在的；在实数系内通常的算术运算具有熟知的那些性质，并且（这是最要紧的）在实数系内，确界原理成立。确界原理描述了实数集的连续性，而有理数集就不具有这种连续性。进而，为了论证的方便，又证明了与确界原理等价的几个定理：闭区间套定理、有限复盖定理及维尔斯特拉斯（Weierstrass）的致密性定理（或称列紧性定理）。

2．利用以上诸定理证明了关于数列极限.函数极限存在的两个重要定理：单调有界的数列（函数）必有极限；关于极限的柯西（Cauchy）收敛原理。从而完成了极限的理论。

3．证明了闭区间上连续函数的性质。

以后微分学、积分学理论的建立与发展都以这一章的理论为基础，因此本章内容是整个数学分析的理论基础。

为了很好地理解数学分析的理论，掌握它的论证方法，必须把这一章学好。但是，不可能一下子就达到熟练掌握的程度。我们准备在习作课上帮助学生搞清楚一些基本概念，掌握基本的证明方法，然后通过以后的反复运用，得以进一

步掌握这些方法.

§1 确界原理

确界原理是我们的出发点，我们首先用它来描述实数的连续性。但确界概念对于初学者不易掌握，学生往往把它与最大（小）值等同起来。对证明中如何运用这个概念也感到困难。要求学生通过一定的练习能够理解这个概念，并且能运用它来证明一些较简单的题目。

下面的练习可以帮助学生正确地理解确界概念。

例1 讨论以下各数集A的上、下确界：

（i） $A=\left\{x \mid a<x<b\right\}$；

（ii） $A=\left\{\operatorname{arctg}x \mid -\infty<x<+\infty\right\}$；

（iii） A为正无理数集的集合；

（iv） $A=\left\{1+n\sin\frac{n\pi}{2} \mid n=1,2,\cdots\cdots\right\}$.

讨论 （i） 显然a，b分别是集A的下界与上界，又对任意$\varepsilon>0$（不妨设$\varepsilon<b-a$），存在 $a+\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $b-\frac{\varepsilon}{2}\in A$， 显然$a+\frac{\varepsilon}{2}<a+\varepsilon$，$b-\frac{\varepsilon}{2}>b-\varepsilon$

$\therefore$ $\inf A=a$， $\sup A=b$.

（ii） 由于$\operatorname{arctg}x$单调、连续及$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arctg}x=-\frac{\pi}{2}$，

$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arctg}x=\frac{\pi}{2}$，可知：

$$A=\left\{y\,\middle|\,-\pi/2<y<\pi/2\right\}\qquad \text{（为什么？）}$$

$$\therefore\quad \inf A=-\pi/2,\quad \sup A=\frac{\pi}{2}.$$

（iii） 显然 0 是 A 的下界，但 A 无上界，故

$\sup A=+\infty$。

$\forall\,\varepsilon>0$，在 $(0,\varepsilon)$ 内必有无理数 s，因而 $s\in A$，

$s<0+\varepsilon$，　　$\therefore\ \inf A=0$。

（iv） 当 $n=2k-1$，

$$1+n\sin\frac{n\pi}{2}=1+(2k-1)\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=1+(2k-1)\cos k\pi\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=1+(2k-1)(-1)^k=x_k$$

此处k可取任意自然数，而

$$x_{2m}=1+(4m-1)\to+\infty\quad(m\to+\infty)$$

$$x_{2m-1}=1-(4m-3)\to-\infty\quad(m\to+\infty)$$

$\therefore$ A 既无上界又无下界，

$\therefore$ $\inf A=-\infty$，　$\sup A=+\infty$。

例 2 设 A 是非空实数集。试证：下面两种定义（Ⅰ）与（Ⅱ）等价：

（Ⅰ） 如果存在实数 β，满足下面的条件：

1° $\forall x\in A$，有 $x\leqslant\beta$，

2° $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,x'\in A$，使 $x'>\beta-\varepsilon$，则称 β 是集 A

的上确界，记为 $\beta=\sup A$。

（Ⅱ） 如果存在实数 β，满足下面的两个条件：

1° $\forall x\in A$， 有 $x\leqslant\beta$，

2° 设 β' 是 A 的任一上界，则 $\beta'\geqslant\beta$，则称β是集 A 的上确界，记为 $\beta=\sup A$。

（证明略，由学生做出）

注意：（Ⅱ）中的条件说明 β 是集 A 的最小上界。因此（上）确界原理可以说成：每个有上界的非空实数集合必有最小上界。

问题1 若集 A 有上界，问 A 是否一定有最大数？又若 A 有最大数，它与 A 的上确界有什么关系？

问题2 设 $f(x)>0$，$x\in D$，能否断定 $\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}>0$？又 $\min\limits_{x\in D}\{f(x)\}$ 是否存在？如果 $\min\limits_{x\in D}\{f(x)\}=\alpha$ 存在，是否必有 $\alpha>0$？

例3 证明：一切正有理真分数 $\frac{m}{n}$ $(0<m<n)$ 所成之集 A 无最大、最小数，但有上、下确界。

证 对任何正有理数$\frac{m}{n}$， $(0<m<n)$ 有

$$\frac{m}{n}=\frac{2m}{2n}>\frac{2m-1}{2n}\quad(0<2m-1<2n)$$

$$\frac{m}{n}=\frac{2m}{2n}<\frac{2m+1}{2n}\quad(0<2m+1<2n)$$

$\therefore$ 集 A 无最大、最小数。

现证：$\inf A=0$， $\sup A=1$。对任何$\frac{m}{n}$ $(0<m<n)$

有 $0<\frac{m}{n}<1$， $\forall \varepsilon>0$， $\exists n_1=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，

$\therefore$ $n_1\leqslant\frac{2}{\varepsilon}$， $\therefore$ $\frac{1}{n_1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$， $\therefore$ $\inf A=0$。

又 $\forall \varepsilon>0$， $\exists n_2=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$， $\therefore$ $n_2+1>\frac{1}{\varepsilon}$，

$\therefore$ $\frac{1}{n_2+1}<\varepsilon$， $\therefore$ $1-\frac{1}{n_2+1}>1-\varepsilon$

$\therefore$ $\frac{n_2}{n_2+1}>1-\varepsilon$ $(0<n_2<n_2+1)$

$\therefore$ $\sup A=1$。

例4 证明：以下定义（Ⅲ）与例1中上确界定义（Ⅰ）或（Ⅱ）等价。

（Ⅲ） 设A是非空实数集，如果存在实数β，满足以下条件：

1° $\forall x\in A$， $x\leqslant\beta$；

2° 存在由A中的数组成的数列$\{x_n\}$**，使$x_n\to\beta$（当$n\to+\infty$）；

则称β为集A的上确界，记为$\beta=\sup A$。

证明 只需证明，在条件1°之下

$\forall \varepsilon>0$， $\exists x\in A$ 使 $x>\beta-\varepsilon \Longleftrightarrow \exists$ 由A中的数组成

**这些x_n ($n=1, 2, \cdots$) 可能有彼此重复者，甚至可能发生$x_n=\beta$ ($n\geqslant N$) 这种特殊情形，此时β是A中最大数。

的数列$\{x_n\}$，使$x_n \to \beta \quad (n\to\infty)$。

"$\Rightarrow$" 对$\varepsilon_n=\frac{1}{n}$，$\exists x_n \in A$ 使$\beta-\frac{1}{n}<x_n\leqslant\beta$

$(n=1, 2, \cdots)$

于是 $|x_n-\beta|\leqslant\frac{1}{n} \quad (n=1, 2, \cdots)$

$\therefore \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n=\beta$。

"$\Leftarrow$" $\forall \varepsilon>0$，$\exists N$，当$n>N$时，$|x_n-\beta|<\varepsilon$，

$\therefore \quad x_{N+1}\in A$ 且 $x_{N+1}>\beta-\varepsilon$。

关于下确界，也有类似的等价定义。

讨论确界问题，有时利用定义Ⅱ也很方便。如例2，显然0，1分别是A的下界与上界。只需取$\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset A$、$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}\subset A$，由于$\frac{1}{n}\to 0$，$\frac{n}{n+1}\to 1$，按定义3便知：

$$\inf A=0, \quad \sup A=1.$$

下面是直接利用确界概念的一些简单证明题，需要灵活运用确界概念的三个等价定义。

练习1 设A、B是两个非空有界实数集，且$A\subset B$，求证：$\sup A\leqslant\sup B$，$\inf A\geqslant\inf B$。

（提示：按定义Ⅰ，只需证$\sup B$是A的上界，这是显然的）

练习1中的命题可以叙述为：当数集扩大时，上确界不会变小，下确界不会变大。

练习2 设A是非空实数集，a是实数，且$\forall x\in A$，有$x<a$，问：$\sup A<a$与$\sup A\leqslant a$中哪一个必定成立？

练习3 设函数 f 在 D 上有界，求证：

1° $\sup\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\inf\limits_{x\in D}\{f(x)\}$；

2° $\inf\limits_{x\in D}\{-f(x)\}=-\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}$。

（这说明上、下确界的问题可以互相转化。又只需证1°，因2°可由1°推出）

例5 设函数 f、g 在 D 上有界，求证：

$$\sup_{x\in D}\{f(x)\}+\inf_{x\in D}\{g(x)\}\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$$
$$\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)\}+\sup_{x\in D}\{g(x)\}$$

证 $\forall x\in D$，$f(x)+g(x)\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}+\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$

由定义Ⅱ知：$\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}+\sup\limits_{x\in D}\{g(x)\}$

又 $$\sup_{x\in D}\{f(x)\}=\sup_{x\in D}\{[f(x)+g(x)]+[-g(x)]\}$$
$$\leqslant\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}+\sup_{x\in D}\{-g(x)\}$$
$$=\sup_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}-\inf_{x\in D}\{g(x)\}$$

$\therefore$ $\sup\limits_{x\in D}\{f(x)\}+\inf\limits_{x\in D}\{g(x)\}\leqslant\sup\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}$

以上证明中注意到了上、下确界的互相转化。

例6 设 A 为非空实数集，且 $\beta=\sup A$ 存在。试证：若 $\beta\bar{\in}A$，则存在 A 中一个严格上升数列 $\{x_n\}$，使 $x_n\to\beta$。

（证明略，注意要求数列 $\{x_n\}$ 严格上升。又若 $\beta\in A$，结论还成立吗？）

例7 证明收敛数列 $\{x_n\}$ 至少达到它的上、下确界中的一个，即集合 $\{x_n \mid n=1, 2, \cdots\}$ 或有最大数或有最小数或既有最大数又有最小数。

证 因收敛数列必有界，

$\therefore \quad \alpha=\inf\left\{x_n \,\middle|\, n=1, 2, \cdots\right\}$,

及 $\beta=\sup\left\{x_n \,\middle|\, n=1, 2, \cdots\right\}$皆存在。

令 $\gamma=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，则由$\alpha\leqslant x_n\leqslant\beta$，得$\alpha\leqslant\gamma\leqslant\beta$，

$\alpha=\beta$ 的情形结论显然成立，只需证$\alpha<\beta$的情形。

（i） 若 $\alpha<\gamma<\beta$，则 $\exists\ \varepsilon>0$ 及 N，使当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in(\gamma-\varepsilon, \gamma+\varepsilon)\subset(\alpha, \beta)$，于是在$(\alpha, \gamma-\varepsilon)$ $(\gamma+\varepsilon, \beta)$ 内都只有有限个 x_n，又因为 α, β 分别是 $\{x_n\}$的上、下确界，故这有限个 x_n 必能分别达到 α 及β。

（ii） 若 $\alpha=\gamma<\beta$，则 $\exists\ \varepsilon>0$ 及 N，使当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in(\alpha, \alpha+\varepsilon)\subset(\alpha, \beta)$，于是 $\{x_n\}$ 可达到 β。

（iii） 若$\alpha<\gamma=\beta$，类似可证 $\{x_n\}$ 可达到 α。

（例7若采用反证法也不复杂）

利用确界原理论证一些理论题，其方法往往很简捷，也很巧妙。关键是构造适当的集合，而这正是证明的难点。一定要对条件、结论加以分析，有时还要借助于直观形象，才能构造出适合我们需要的集合，再进一步论证。下面我们举几个例子，主要说明如何通过分析，构造出合适的集合。这些例子有的较为复杂，不一定都用在习作课上，仅供参考。

例8 介值定理告诉我们，对于连续的 f 来说，当 $f(a)<0$，$f(b)>0$ 时，必存在 $\xi\in(a, b)$ 使 $f(\xi)=0$。那么是否存在一个使$f(\xi)=0$ 的最大的 ξ 呢？（这样的 ξ 可称为 f 在 (a, b) 内的最大零点）直观上似乎是对的。下面具体加以证明，即证 $\exists\ c\in(a, b)$，使 $f(c)=0$，

且 $\forall x\in(c,\ b]$　$f(x)>0$。

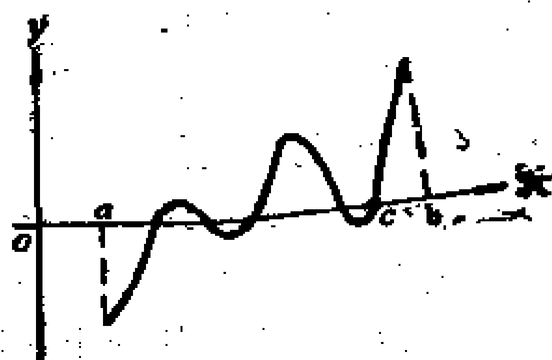


图　9

证　很自然地构造出 f 在 $(a,\ b)$ 内的零点集

$$A=\left\{x\ \middle|\ x\in(a,b)\text{且}f(x)=0\right\}$$

要证集 A 有最大数 c，可先证 A 有上确界 c，再证 $c\in A$ 即可。

由介值定理知 A 非空，又 A 有界，∴　$c=\sup A$ 存在且 $c\in(a,\ b)$。

若 A 为有限集，则 $c=\max A$，结论成立，

若 A 为无限集，则存在 $\{x_n\}\subset A$，使 $x_n\to c$，再由 f 之连续性知：$f(c)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，　∴ $c\in A$，

∴　$c=\max A$，此时 f 在 $(c,\ b)$ 内没有零点，必与 $f(b)$ 同号，即 $f(x)>0$ 当 $x\in(c,\ b]$，∴　结论成立。

例 9　证明：若函数 f 在 $[a,\ b]$ 上连续，且 $[a,b]$ 上每一点皆为 f 的极大点，则 f 在 $[a,\ b]$ 上是常值函数。

分析　如果 x_0 既是 f 的极大值点，又是 f 的极小值点，那么必定存在 x_0 的某个领域，在其上 f 为常值函数（取值 $f(x_0)$）。在已给条件下，这样的 x_0 是存在的（可取 f 在 $[a,b]$ 的最小值点作为 x_0，不妨设 $x_0\in(a,\ b)$）。

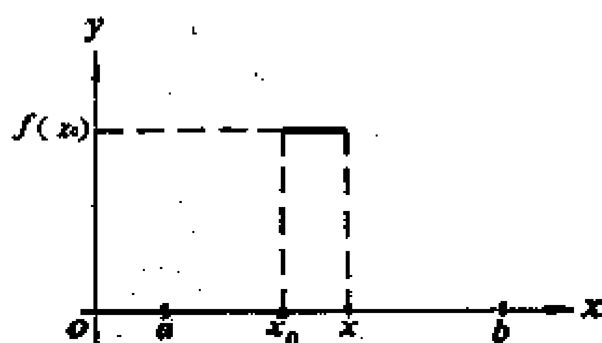


图　10

先看 x_0 之右侧，这时存在闭区间 $[x_0,\ x]$，在

其上 f 取值 $f(x_0)$。我们把具有这种性质的 x 的集合记为 A，只要证明 A 有最大值 b 即可，或者说证明：$\sup A=b$ 且 $b\in A$ 即可。这样就明确了应当构造什么样的集合。

x_0 之左侧类似证明。

证明 设 x_0 是 f 在 $[a,b]$ 的最小值点，不妨设 $x_0\in(a,b)$。于是存在包含 x_0 在内的某个闭区间 $I\subset[a,b]$，在其上 f 取值 $f(x_0)$。构造集合

$$A=\left\{x\,\middle|\,x_0<x\leqslant b;\ \forall\, t\in[x_0,\ x],\ f(t)=f(x_0)\right\}$$

由上述闭区间 I 的存在知 $A\neq\varnothing$，又 A 显然有上界，$\therefore\beta=\sup A$ 存在。

先证 $\beta\in A$，即证 $\forall\, t\in[x_0,\beta]$，$f(t)=f(x_0)$，当 $t<\beta$ 时，$\exists\, x\in A$，使 $t<x$，于是 $f(t)=f(x_0)$ 当 $t=\beta$ 时，$\exists\, x_n\in A$，使 $x_n\to\beta$，再由 $f(x_0)=f(x_0)$ 及 f 在 β 的连续性知 $f(\beta)=f(x_0)$。

再证 $\beta=b$，若不然：$\beta<b$

则由于，$f(\beta)=f(x_0)$，故 β 既是 f 的极大点又是 f 的极小点，$\therefore$ 存在 $x'\in(\beta,\ b)$ 使 $\forall\, t\in[\beta,\ x']$，$f(t)=f(x_0)$，于是 $\forall\, t\in[x_0,\ x']$ 有 $f(t)=f(x_0)$ 即 $x'\in A$ 与 $\beta=\sup A$ 矛盾，故 $\beta=b$，于是 $\forall\, t\in[x_0,\ b]$，有 $f(t)=f(x_0)$。

类似可证明：$\forall\, t\in[a,\ x_0]$，有 $f(t)=f(x_0)$，因此 f 在 $[a,\ b]$ 上是常值函数。

最后安排几个练习题，要求构造适当的集合并进一步利用确界原理进行证明。对证明方法加以限制，纯粹是为了练习。其中有些题目可能有更方便的证法，有兴趣的同学可考虑其他证法并加以比较。

练习 4 利用确界原理证明介值定理：若 f 在 $[a,\ b]$ 连

续，且$f(a)<0$，$f(b)>0$，则存在$c\in(a, b)$，使$f(c)=0$。

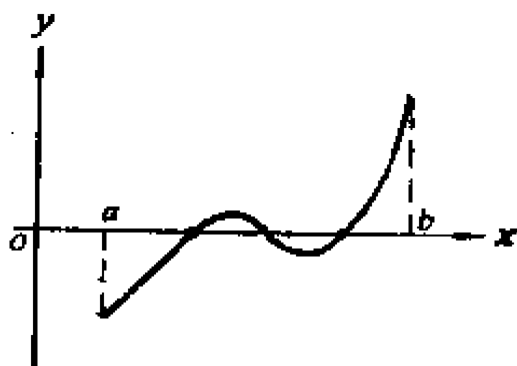


图 11

提示 由图形可以看出集合

$$A=\left\{x \middle| x\in[a, b], f(x)<0\right\}$$

的上确界是f的最大零点；而集合$B=\left\{x \middle| a<x<b; \forall t\in[a, x), f(t)<0\right\}$的上确界是$f$的最小零点，证明时当然只需构造$A$、$B$中的一个集合即可。注意证明要严密，不可依赖直观。

若想确定的零点是集合的下确界，该怎样构造集合？

练习5 利用确界原理证明有界性定理：若f在$[a, b]$连续，则f在$[a, b]$有界。

提示 构造集合

$$A=\left\{x \middle| x\in[a, b); \forall t\in[a, x], 有 |f(t)|<K(x)\right\}$$

（其中$K(x)$是f在$[a, x]$的上界），然后证明$\sup A=b\in A$，即A有最大值b。

练习6 设f定义在x_0的δ-邻域$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内，且

当$x_0-\delta<x<x_0$时，　$f(x)<f(x_0)$

当$x_0<x<x_0+\delta$时，　$f(x_0)<f(x)$

则称f在点x_0严格上升（注意：这并不意味着f在x_0的邻域内严格上升）

试证：若f在$[a, b]$的每一点严格上升，则f在$[a, b]$严格上升。

提示 要证f在$[a, b]$严格上升，只要证：对每一个$c\in[a,b]$，不等式$f(c)<f(t)$对一切$c\leqslant t\leqslant b$成立。由条件知：对每个$c\in[a, b)$，存在$x\in(c, b]$，使$f(c)<f(t)$对一切$c<t\leqslant x$成立，只要证具有上述性质的最大的x是b即可。这样，应当构造什么样的集合就很清楚了。

§2 柯西收敛原理

在第二章内，曾根据单调收敛原理证明了某些数列的收敛性，这个方法较为有用，也不难掌握。不过它只给出了数列收敛（或函数极限存在）的充分条件。而柯西收敛原理给出了极限存在的充要条件，因而在理论上显得更加重要。

要求学生能够正确理解柯西收敛原理的条件，并能在证明中初步运用它。

例1 关于数列的柯西收敛原理也可叙述为：数列$\{x_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0, \exists N$，当$n>N$及一切$p=1, 2, 3, \cdots\cdots$，不等式 $|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$ (A)

试问：箭头右端的条件(A)能否为以下条件（B）所代替？

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall p=1, 2, \cdots\cdots,\ \exists N, \text{当} n>N$$

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon \qquad (B)$$

解 (A)中的$N=N(\varepsilon)$与p无关，(B)中的$N=N(\varepsilon, p)$依赖于p，显然若满足条件（A），则必满足条件（B），但反过来不一定对。

如 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 固定自然数p，要使

$$|x_{n+p}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{p}{n+p}<\frac{p}{n+1}<\varepsilon,$$ 只要

$n>\frac{p}{\varepsilon}-1$，取$N(\varepsilon,p)=\left[\frac{p}{\varepsilon}-1\right]$，当$n>N(\varepsilon,p)$，$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$，

$\therefore\{x_n\}$满足条件(B)。

但不论n多么大，取$p=n$，则

$$|x_{n+p}-x_n| = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

$\therefore$条件(A)不满足。因此，条件(B)较条件(A)要弱，不能作为数列收敛的充要条件。这里我们举出的数列$\{x_n\}$虽然满足条件(B)但不收敛。

例2 设$x_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}$。以下两种证明，一个得到$\{x_n\}$收敛的结论，一个得到$\{x_n\}$发散的结论，试分析哪一个证明对，并指出另一个的错误所在。

证明1 不妨设$l>m$，

$$|x_l-x_m|=\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{l}}<\frac{l-m}{\sqrt{m+1}}<\frac{l-m}{\sqrt{m}}$$

又$\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{m}}=0$，$\therefore\ \forall\varepsilon>0$，取$\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{l-m}$，

$\exists N$，当$m\geqslant N$，$\frac{1}{\sqrt{m}}<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{l-m}$，$\therefore|x_l-x_m|<\varepsilon$，当$l>m>N$，

由柯西收敛原理知$\{x_n\}$收敛。

证明2 不妨设$l>m$因

$$|x_l-x_m|=\frac{1}{\sqrt{m+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{l}}\geqslant\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{l}$$

$\forall n$，取$l_1=4n$，$m_1=2n$，则$l_1>m_1>n$，但

$$|x_{l_1}-x_{m_1}|>\frac{1}{m_1+1}+\frac{1}{m_1+2}+\cdots+\frac{1}{l_1}$$

$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\cdots+\frac{1}{4n}$$

$$>\frac{2n}{4n}=\frac{1}{2}.$$

于是存在$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，$\forall N$，$\exists\, l_1>m_1>N$，使$|x_{l_1}-x_{m_1}|\geqslant\varepsilon_0$ 由柯西原理知$\{x_n\}$发散。

练习1 利用柯西收敛原理判别以下数列是收敛还是发散。

(i) $x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$

(ii) $x_n=1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$

(iii) $x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

(iv) $x_n=\sin\frac{n\pi}{2}$

（答：(i)(iii)收敛；(ii)(iv)发散）

练习2 若数列$\{x_n\}$具有性质：

$|x_{n+1}-x_n|\leqslant cr^n$ （其中$c>0$，$0<r<1$）求证：$\{x_n\}$收敛。

提示 不妨设$m>n$，则

$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$再利用所给条件。

练习3 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在的充要条件是$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，当$x'$，$x''>X$时，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

提示 条件的必要性易证，主要证条件的充分性，有几条途径可循，如：

A 模仿数列的柯西收敛原理的证明方法。

B 利用函数极限与数列极限的关系，将关于数列的柯西收敛原理移到函数情形。

C 利用致密性定理证明存在$\{x_n\}$：$x_n\to+\infty$且$f(x_n)\to A$，然后证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。

练习4 在第四章内曾经证明了对于开区间(a,b)上的连续函数f，如果$f(a+0)$，$f(b-0)$都存在，则f在(a,b)上一致连续，试证：这个条件也是f在(a,b)一致连续的必要条件。

提示 验证在$x=a$之右侧或在$x=b$之左侧，函数f满足柯西收敛原理的条件。

例3 设函数f在$(-\infty,+\infty)$上满足Lipschitz条件：$\forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$，其中

$0<L<1$（满足上述条件的函数f称为收缩函数），求证：

1° f在$(-\infty,+\infty)$上一致连续；

2° 存在唯一的$x_0\in(-\infty,+\infty)$，使$f(x_0)=x_0$（这种x_0称为f的不动点）；

3° $\forall x_1\in(-\infty,+\infty)$，构造$x_n=f(x_{n-1})$ $(n=2,3,\cdots)$ 则$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$。

这种求f的不动点的方法叫做逐次逼近法，其中

$$x_n=f(x_{n-1})=f(f(x_{n-2}))=\cdots=\underbrace{f(f(f\cdots(f(f(x_1))))}_{n-1\text{层}}.$$

证明

1° $\forall\varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{L}$，

当x_1，$x_2\in(-\infty,+\infty)$且$|x_1-x_2|<\delta$时，

$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|<L\delta=\varepsilon$

$\therefore f$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续。

2°与3°

先证 $\forall x_1\in(-\infty,+\infty)$，按照$x_n=f(x_{n-1})$ $(n=2,3,\cdots)$构造的数列$\{x_n\}$满足柯西收敛原理的条件。

由条件知：

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|\leqslant L|x_n-x_{n-1}|$$

$$\leqslant L^2|x_{n-1}-x_{n-2}|\leqslant\cdots\leqslant L^{n-1}|x_2-x_1|\quad(n=1,2,\cdots)$$

又$\forall m>n$

$$|x_m-x_n|\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$$

$$\leqslant|x_2-x_1|(L^{m-2}+L^{m-3}+\cdots+L^{n-1})$$

$\leqslant |x_2-x_1|\dfrac{L^{n-1}}{1-L}$.

而 $\lim\limits_{n\to\infty} L^{n-1}=0$ 故 $\{x_n\}$ 满足柯西收敛原理条件. (为什么?) 因而收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$. 再由 $x_n=f(x_{n-1})$ 及 f 在点 x_0 连续得:

$$x_0=f(x_0) \quad \therefore \quad x_0\text{是}f\text{的不动点.}$$

最后证不动点的唯一性. 不然, 若 $x_1\neq x_0$ 也是 f 的不动点, 则 $0<|x_1-x_0|=|f(x_1)-f(x_0)|\leqslant L|x_1-x_0|$
$<|x_1-x_0|$ 矛盾.

§ 3 闭区间套定理

课本上证明维尔斯特拉斯定理及连续函数的介值定理时用到了闭区间套定理. 有时也说它或柯西收敛原理刻划了实数系的完备性. 闭区间套定理本身是由一个闭区间套 $\{I_n\}$ 确定唯一的点 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. 粗略地说, 如果一切 I_n 都具有某种共同性质 P, 则由于 ξ 之任意邻域含有 I_n $(n\geqslant k)$, 所以 ξ 的局部具有性质 P, 简单地说这个定理可以把整体性质收缩到局部——某点的邻域. 利用闭区间套定理证明问题时要注意这一点. 下面先看两个例子, 再做两个练习, 以熟悉其用法.

例1 试证: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 无界, 则必在某点 $\xi\in[a,b]$ (局部)无界.

证明 将 $[a,b]$ 二等分, 则 f 必(至少)在其中之一无

界，记为 $[a_1,b_1]$；再将 $[a_1,b_1]$ 二等分，f必定至少在其中之一无界，记为 $[a_2,b_2]$ ……如此继续下去，得闭区间套 $\{[a_n,b_n]\}$，f在每个 $[a_n,b_n]$ 上无界，根据闭区间套定理，确定唯一的$\xi\in[a_n,b_n]$($n=1,2,\cdots$)，因为ξ的任何邻域$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$内必含有某个 $[a_n,b_n]$，所以f在$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$无界，而$\varepsilon>0$任意，所以$f$在点$\xi$(局部)无界。

例2　利用闭区间套定理直接证明连续函数的最大值定理(不引用有界性定理)。

证　设f在 $[a,b]$ 连续，记$M=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$(目前还不能排除$M=+\infty$的可能)将 $[a,b]=I_1$二等分，则其中至少有一个，f在其上的上确界为M(为什么？)记它为I_2，再将I_2二等分，其中至少有一个，f在其上的上确界为M，如此继续下去，得到闭区间套$\{I_n\}$，使“$\sup\limits_{x\in I_n}\{f(x)\}=M$”(性质$P$)，根据闭区间套定理，得到唯一的$\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$，首先证明$M$为有限数，若不然，设$M=+\infty$，由于$f$在$\xi$连续，$\therefore\exists\ (\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，使$f$在$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$上有界；又存在$I_n\subset(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$，因$\sup\limits_{x\in I_n}\{f(x)\}=+\infty$，$\therefore f$在$I_n$上无界，因而$f$在$(\xi-\varepsilon,\xi+\varepsilon)$上无界，矛盾，故$M$为有限数。

再者只要证$f(\xi)=M$即可，由于f在ξ连续，因此只要证存在$x_k\to\xi$，使$f(x_k)\to M$即可。$\because$对每个自然数k，存在

$$I_{n_k}\subset\left(\xi-\frac{1}{k},\xi+\frac{1}{k}\right)$$

又 $\because \quad \sup\limits_{x\in I_{n_k}}\{f(x)\}=M$

$\therefore$ 存在$x_k\in x\in I_{n_k}$

使 $$M-\frac{1}{k}<f(x_k)\leqslant M\cdots\cdots(A)$$

当然还有 $$|x_k-\xi|<\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(B)$$

由(A)及(B) 便知当$k\to+\infty$时，$x_k\to\xi$，$f(x_k)\to M$

因此 $$f(\xi)=\lim_{k\to\infty}f(x_k)=M$$

$$\therefore \quad M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.$$

以上证明只作为应用闭区间套定理的练习。当然还是传统的证法（先证有界性定理，再利用维尔斯特拉斯定理证明最大值存在）简明易懂。

下面两个练习供参考。

练习1 设D为实数集，ξ是一实数，如果ξ的任一邻域内都含有D的无限多个点，则称ξ是D的一个聚点。试利用闭区间套定理证明Weierstrass的聚点原理：任一有界的无限集至少有一个聚点。

（聚点原理与前面的维尔斯特拉斯（致密性）定理等价，证明方法也类似）

练习2 利用闭区间套定理证明一致连续性定理。

提示 可用反证法，即设f在$[a,b]$不一致连续，要推出$\exists\,\xi\in[a,b]$，使f在点ξ不连续。为确定ξ，可构造具有以下性质的闭区间套$\{I_n\}$：“$\exists\,\varepsilon_0>0$，$\forall\delta>0$，$\exists\,x',x''\in I_n$，$|x'-x''|<\delta$，但$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$”。需要注意，具有上

述性质的区间套$\{I_n\}$的存在性要加以证明。

§4 致密性定理（维尔斯特拉斯定理）

课本上证明闭区间上连续函数的性质，多次用到维尔斯特拉斯定理，这个定理很有用，掌握它也不太困难。但学生在证明中也常有错误发生，这往往是由于子列概念不清而造成的。子列概念以前已经接触到，目前在关于致密性定理的练习中，还要注意巩固这个概念。

例1 若$\{x_n\}$是有界发散数列，试证：存在两个子列$\{x_{n'_k}\}$及$\{x_{n''_k}\}$，它们分别趋于两个不同的极限。

证明 不妨设$\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta\ (n=1,2,\cdots)$，根据维尔斯特拉斯定理，存在收敛子列$\{x_{n'_k}\}$：$x_{n'_k} \to a\ (k \to +\infty)$。如何证明另一个子列$\{x_{n''_k}\}$的存在呢？这里$\{x_{n''_k}\}$收敛但其极限异于$a$，取$a$的小邻域$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\alpha, \beta)$，只要证得在$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$之外有无穷多个$x_n$，就好办了。因为由此即知$[\alpha, a-\varepsilon]$，$[a+\varepsilon, \beta]$中至少有一个包含无穷多个$x_n$，再利用维尔斯特拉斯定理就可证得存在符合要求的$\{x_{n''_k}\}$，详细证明由学生仔细写出。

下面的证明比较迂回，貌似正确，其实是错误的，试加以分析。

证明 设$\alpha \leqslant x_n \leqslant \beta$，则$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k^{(1)}}\}$：

$$x_{n_k^{(1)}} \to a \quad (k \to +\infty)$$

从$\{x_n\}$中剔去$\{x_{n_k^{(1)}}\}$，得$\{x_n\}$的一系列$\{\quad\}_1$，它有子

列$\{x_{n_k^{(2)}}\}$收敛于b_1，若$b_1 \neq a$，则结论真，若$b_1 = a$，

再从$\{\quad\}_1$中剔去$\{x_{n_k^{(2)}}\}$，得$\{x_n\}$的一子列$\{\quad\}_2$，它又有子列$\{x_{n_k^{(3)}}\}$收敛于b_2，若$b_2 \neq a$则结论真，若$b_2 = b_1 = a$，继继做下去，只可能出现两种情形：

(i)　做到某一步，有$a = b_1 = b_2 = \cdots = b_k \neq b_{k+1}$则结论真。

(ii)　$b_n = a$　$(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$，则说明$\{x_n\}$的上述一切子列皆收敛于值$a$，因而$\{x_n\}$本身收敛，与假设矛盾。

$\therefore$　(ii)不可能发生，只能出现(i)，证毕。

例2　若$\{x_n\}$无界，但非无穷大量，则必存在两个子列，其中一个收敛，另一个是无穷大量。

证明　$\because \{x_n\}$无界，根据维尔斯特拉斯定理的推论知必有子列$\{x_{n'_k}\}$，$x_{n'_k} \to \infty$　$(k \to +\infty)$

又由于$\{x_n\}$非无穷大，$\therefore \exists M > 0, \forall N, \exists n > N$，使$|x_n| < M$　$\therefore$在$[-M, M]$内含有无穷多个x_n，因而含有$\{x_n\}$的子列，据维尔斯特拉斯定理，该子列必有收敛子列$\{x_{n''_k}\}$，$x_{n''_k} \to a$。　证毕

试分析以下证法是否正确？

证明　$\because \{x_n\}$无界，$\therefore$有子列$\{x_{n'_k}\}$：$x_{n'_k} \to \infty \ (k \to \infty)$

设$\{x_{n''_k}\}$为$\{x_n\}$的另外任一子列，如果都有$x_{n''_k} \to \infty \ (k \to \infty)$则，$x_n \to \infty \ (n \to \infty)$，与条件矛盾，$\therefore$至少存在一个子列$x_{n''_k} \not\to \infty \ (k \to +\infty)$因而它有收敛子列$\{x_{n''_k}\}$。

例3　证明，数列$\{x_n\}$有界的充要条件是$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$都含有收敛子列。

证明 (一)条件的必要性

若$\{x_n\}$有界，则$\{x_n\}$的任何子列$\{x_{n_k}\}$有界，据维尔斯特拉斯定理，$\{x_{n_k}\}$必有收敛子列。

(二) 条件的充分性 (用反证法)

假设$\{x_n\}$无界，则$\{x_n\}$必有子列$\{x_{n_k}\}$：$x_{n_k}\to\infty$ $(k\to+\infty)$，于是$\{x_{n_k}\}$的任何子列都趋于无穷。与"$\{x_{n_k}\}$含有收敛子列"矛盾，故$\{x_n\}$有界。

练习1 证明：若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$为有界数列，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，则存在一个严格上升的自然数列使

$$\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=\lim_{n\to\infty}y_{n_k}=a$$

(注意：这里$\{x_{n_k}\}$、$\{y_{n_k}\}$分别是$\{x_n\}$、$\{y_n\}$具有同样足码的子列)

练习2 设$\{x_n\}$为有界数列，如果$\{x_n\}$的任一收敛子列都以a为极限，求证：$\{x_n\}$也以a为极限。若去掉条件"$\{x_n\}$有界"，结论还成立吗？

提示 可用反证法，假设$\{x_n\}$不以a为极限，则可证存在一个收敛子列不以a为极限；若去掉条件"$\{x_n\}$有界"，则结论不再正确。

练习3 设$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都含有收敛于a的子列$\{x_{n_{k_i}}\}$，求证：$\{x_n\}$以a为极限，若条件改为"$\{x_n\}$的任一子列$\{x_{n_k}\}$都含有收敛的子列"，那么$\{x_n\}$还一定收敛吗？

提示 证法类似练习2；改变后的条件是$\{x_n\}$有界的充分必要条件(例3)。

以上各例及练习说明数列$\{x_n\}$本身的某些特性可以反映到它的子列上来，反过来，由子列的某些性质又可导出它本身的某些特性，它们的关系有些象函数极限与数列极限之间的关系。

下面两个练习题的证明仅涉及子列概念，不需要维尔斯特拉斯定理。

练习4 试证实数a是$\{x_n\}$某子列极限的充要条件是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 无穷多个n，使$|x_n-a|<\varepsilon$。

练习5 试证实数a不是$\{x_n\}$的任何子列的极限的充要条件是：存在点a的ε_0邻域$(a-\varepsilon_0,a+\varepsilon_0)$，其中至多含有限个$x_n$。

最后再举几个利用维尔斯特拉斯定理的题目作为练习。

练习6 利用维尔斯特拉斯定理证明：单调有界数列必收敛。

提示 由维尔斯特拉斯定理推出，$\{x_n\}$必有一收敛子列，设其极限为a，然后证明$\{x_n\}$必收敛于a(也可用柯西收敛原理证)。

例4 设函数f定义在$[a,b]$上，且f在$[a,b]$的每一点局部有界，试证：f在$[a,b]$有界。

证明 设f在$[a,b]$无界，则对$n=1,2,\cdots$

$\exists\ x_n\in[a,b]$，有$|f(x_n)|>n$，故$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$，再根据维尔斯特拉斯定理，$\{x_n\}$必有收敛子列$\{x_{n_k}\}$：

$x_{n_k}\to x_0\in[a,b]\quad(k\to\infty)$，而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_{n_k})=\infty$，证明$f$在点$x_0$局部无界，与条件矛盾，因此$f$在$[a,b]$有界。

例5 设f在$[a,b]$连续，且$\forall x\in[a,b]$，$\exists y\in[a,b]$，使$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$，求证：存在$x_0\in[a,b]$，使$f(x_0)=0$。

证明 由条件知，可构造一个数列$\{x_n\}\subset[a,b]$，使 $|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_{n-1})|\leqslant\frac{1}{2^2}|f(x_{n-2})|$

$\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^{n-1}}|f(x_1)|$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=0$，又据维尔斯特拉斯定理，$\{x_n\}$有收敛子列$\{x_{n_k}\}$：$x_{n_k}\to x_0\in[a,b]$ $(k\to\infty)$，最后由f在x_0的连续得知：

$$f(x_0)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=0$$

至于维尔斯特拉斯定理本身的证明，课本上利用了闭区间套定理，也可以用其他方法。

例6 利用单调有界数列收敛定理证明维尔斯特拉斯定理。

证明 先证明任何数列必有一单调子列。

考虑集合$T_m=\{x_m,\ x_{m+1},\ x_{m+2},\ \cdots\}$ $(m=1,\ 2,\ \cdots)$有且仅有下面两种情形：

(i) 每个T_m有最大值，此时$\{x_n\}$含有单调下降的子列$\{x_{n_k}\}$：

取 $x_{n_1}=\max T_1$

$x_{n_2}=\max T_{n_1+1}$

$\vdots$

$x_{n_{k+1}}=\max T_{n_k+1}$

$\vdots$

显然 $\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的单调下降子列。

(ii) 存在某个集合$T_k=\{x_k,\ x_{k+1},\ \cdots\}$，$T_k$无最大

值，下面证明此时$\{x_n\}$必含有单调上升子列。

$\because T_k$没有最大值，$\therefore$当$m>k$时，T_m也无最大值。

取 $x_{n_1}=x_k$，则 x_{k+1}，x_{k+2}，…中必有某个大于x_k，记为 x_{n_2}，于是x_{n_2+1}，x_{n_2+2}，…中必有某个大于x_{n_2}，记为 x_{n_3}，于是x_{n_3+1}，x_{n_3+2}，中必有某个大于x_{n_3}，记为 x_{n_4}，………。

如此继续下去，当得到

$x_{n_1}<x_{n_2}<\cdots\cdots<x_{n_k}$时，则在$x_{n_k+1}$，$x_{n_k+2}$，…中仍有某个大于$x_{n_k}$，记为$x_{n_{k+1}}$。这样得到的子列$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的单调上升子列。

再证明维尔斯特拉斯定理：设$\{x_n\}$为有界数列，由上知必存在一单调子列$\{x_{n_k}\}$，它也是有界的，故由单调有界数列收敛定理知，$\{x_{n_k}\}$收敛。

也可以利用有限复盖定理证明维尔斯特拉斯定理（§5例1）。

§5 有限复盖定理

有限复盖定理与维尔斯特拉斯定理是彼此等价的。它们描述的性质通常称为紧性。有限复盖定理形式上说的是无穷转化为有穷：若闭区间能被某个开区间族（常含有无穷多个开区间）复盖，则它能被有限个开区间所复盖。正是通过这种无穷到有穷的转化，它常常可以把闭区间$[a, b]$上每点所具有的局部性质转化为整个闭区间上的整体性质。分析一下课本上利用它证明连续函数有界性定理的过程，就看得很清楚。

由于有限复盖定理本身较难理解，先做几个简单的练习。

练习1 设$D=(0,1/2]$，作开区间族$\mathscr{T}=\{I_n|_{n=1,2,\cdots}\}$其中$I_n=\left(\frac{1}{n+1},\ \frac{1}{n}\right)$，求证：$\mathscr{T}$是$D$的一个开复盖，但不含$\mathscr{T}$的有限开子复盖，即不存在有限个$I_n$复盖$D$。

如果$0<\varepsilon<\frac{1}{2}$，令$D_\varepsilon=\left[\varepsilon,\ \frac{1}{2}\right]$，则$D$含$D_\varepsilon$的有限开子复盖。

练习2 设$D=\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2},\frac{1}{2^2},\cdots,\ \frac{1}{2^n},\cdots\right\}$且开区间族$\mathscr{T}=\left\{(-\varepsilon,\varepsilon),(1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon),\left(\frac{1}{2^n}-\frac{\varepsilon}{2^n},\ \frac{1}{2^n}+\frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right|$ $n=1,\ 2,\ \cdots\Big\}$$\left(\text{其中}\ 0<\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$，显然$\mathscr{T}$复盖集合$D$，问$\mathscr{T}$是否含有$D$的有限开子复盖？

练习3 设$D=\left\{0,\ \frac{1}{n}\middle|_{n=1,\ 2,\ \cdots\cdots}\right\}$，求证：$D$的任何一个开复盖$\mathscr{T}$必有有限子复盖。

若D改为$D_1=\left\{\frac{1}{n}\middle|_{n=1,\ 2,\ \cdots}\right\}$，上述结论还成立吗？

下面举几个利用有限复盖定理证明的例题及练习。

例1 利用有限复盖定理证明维尔斯特拉斯定理。

证明 设数列$\{x_n\}$有界，即$\exists M>0$，使$|x_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$。$\therefore$ $\{x_n\}$若有收敛子列，该子列极限必在$[-M,\ M]$内，下面我们证明$[-M,\ M]$内至少有一个数是$\{x_n\}$某子列的极限。若不然，则$[-M,\ M]$内每个x皆不是$\{x_n\}$任何子列的极限，根据§3练习5，必存在$\varepsilon(x)>0$，使

$(x-\varepsilon(x),\ x+\varepsilon(x))=U(x,\varepsilon(x))$ 内至多含有有限个 x_n。而开区间族 $\mathscr{U}=\{U(x,\varepsilon(x))\ |x\in[-M,M]$；$U(x,\varepsilon)$ 内至多含有限个 $x_n\}$ 复盖 $[-M,M]$，因而 $[-M,M]$ 有有限子复盖 $\mathscr{U}^\circ=\{U(x_k,\varepsilon(x_k))\ |k=1,2,\cdots,m\}$ 又每个 $U(x_k,\varepsilon(x_k))$ 内至多有有限个 x_n，$\therefore[-M,M]$ 内至多有有限个 x_n 与 $x_n\in[-M,M]$ $(n=1,2\cdots\cdots)$ 矛盾。因此 $[-M,M]$ 中至少有一个数是 $\{x_n\}$ 某子列的极限，于是 $\{x_n\}$ 有收敛子列。

例2 证明勒贝格 (Lebesgue) 引理：设 $[a,b]$ 有一开复盖 $\mathscr{T}$，则存在正数 $l>0$，（称 l 为勒贝格数）对于 $[a,b]$ 中任一点 x 的 l—邻域 $U(x,l)$，都能被 $\mathscr{T}$ 中一个开区间复盖。

证明 $\forall x\in[a,b]$，$\exists I_x=(\alpha_x,\beta_x)\in\mathscr{T}$，使得 $x\in I_x$

取 $\delta_x=\min\left\{\dfrac{x-\alpha_x}{2},\ \dfrac{\beta_x-x}{2}\right\}>0$

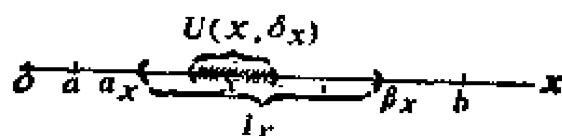


图 12

则 $U(x,\delta_x)\subset U(x,2\delta_x)\subset I_x$，于是开区间族 $\mathscr{U}=\{U(x,\delta_x)\ |x\in[a,b]\}$ 复盖 $[a,b]$，因而有有限子复盖，即

$$[a,b]\subset\bigcup_{i=1}^{m}U(x_i,\delta_{x_i})$$

令 $l=\min\{\delta x_1,\delta x_2,\cdots,\delta x_m\}$，下面证 l 符合要求。

$\forall x\in[a,b]$，$\exists$ 某个 i，使 $x\in U(x_i,\delta_{x_i})\subset U(x_i,2\delta_{x_i})\subset I_{x_i}$



图 13

当 $x'\in U(x,l)$ 时，$|x'-x_i|\leqslant|x'-x|+|x-x_i|\leqslant$
$\leqslant l+\delta_{x_i}\leqslant 2\delta_{x_i}$，$\therefore x'\in I_{x_i}$，

$\therefore U(x,l)\subset I_{x_i}$，证毕。

练习4 利用有限复盖定理证明闭区间套定理。

提示 设 $\{[a_n,b_n] \mid n=1, 2, \cdots\}$ 为闭区间套，要证 $\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]=\{\xi\}$ 其中 $\{\xi\}$ 为只含 ξ 一点的集合，只需证 $\exists\,\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 即可，因为 ξ 之唯一性明显。若不然，则 $\forall\, x\in[a_1,b_1]$，$x\overline{\in}\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$，而由于区间套的逐个包含关系，必存在 n_x，使 $x\overline{\in}[a_k,b_k]$ 当 $k\geqslant n_x$。$\therefore$ 必存在 $U(x,\delta_x)$，使 $U(x,\delta_x)\cap[a_k,b_k]=\varnothing$（当 $k\geqslant n_x$），于是 $[a_1,b_1]$ 有开复盖 $\mathfrak{U}=\{U(x,\delta_x)\mid x\in[a_1,b_1]; U(x,\delta_x)\cap[a_k,b_k]=\varnothing$，当 $k\geqslant n_x\}$ 然后利用有限复盖定理导出矛盾。

练习5 证明：若 f 在 $[a, b]$ 连续，且 $f(x)>0$ 当 $x\in[a, b]$，则存在 $c>0$，$\forall\, x\in[a, b]$，有 $f(x)\geqslant c$（由闭区间上连续函数的最小值定理立刻证出，这里作为练习，要求用有限复盖定理证明）。

提示 对每个 $x_0\in[a,b]$，由于 f 在 x_0 连续且 $f(x_0)>0$，必存在 x_0 的某邻域 $(x_0-\delta(x_0),\ x_0+\delta(x_0))$，在其内，函数值大于 $\frac{f(x_0)}{2}$，再设法利用有限复盖定理证明。

第六章　导数与微分

§1　导数概念

函数的导数是微积分学中重要概念之一，它的产生是为了描述曲线的切线和运动质点的速度。一旦用精确的数学形式定义之后，就必须严格根据定义及已经推出的定理进行判断和推理。

用导数定义求导数，对于理解导数概念和求导数都是重要的。

例1　a）用定义直接证明：$f(x)=\frac{1}{x}$，在$a(\neq 0)$点的导数是$f'(a)=-\frac{1}{a^2}$。

b）证明f的图象在点$(a,\frac{1}{a})$的切线，除了切点以外不与f的图象相交。

证　a）$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{a+\Delta x}-\frac{1}{a}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{a(a+\Delta x)}=-\frac{1}{a^2}.$$

b）所考虑的切线是

$$g(x)=-\frac{1}{a^2}(x-a)+\frac{1}{a}=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}.$$

的图象。若$f(x)=g(x)$，即

$$\frac{1}{x}=-\frac{x}{a^2}+\frac{2}{a}.$$

从这方程只解得$x=a$，这就证明f的图象与切线只有一个公共点$\left(a,\frac{1}{a}\right)$（图14）

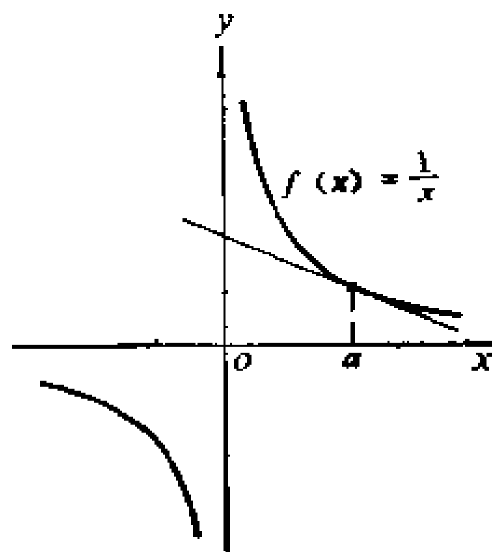


图 14

例2 用例1同样方法证明：a）如果$f(x)=\frac{1}{x^2}$，当$a\neq0$时，$f'(a)=-\frac{2}{a^3}$。 b）f在点$\left(a,\frac{1}{a^2}\right)$的切线与$f$的图象相交于另一点，这一点位于直立轴的另一边。

证 a）证明从略。

b）f在点$\left(a,\frac{1}{a^2}\right)$的切线与$f$再交于点$\left(-\frac{a}{2},\frac{4}{a^2}\right)$，

这点与点$\left(a,\frac{1}{a^2}\right)$位于直立轴的两侧。（图15）

上述两个例题说明函数在每点的切线只与该图象相交于

一点的概念是不正确的。

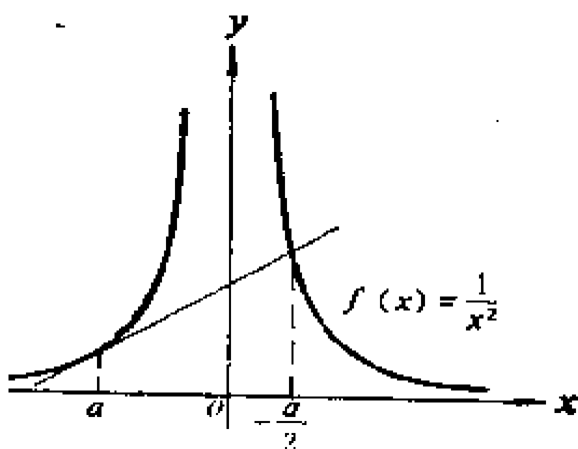


图 15

例3 设 $f(x)=x-[x]$，求 f'。

解 设 $n<a<n+1$（n 为整数），

$$f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(a+\Delta x)-[a+\Delta x]-(a)-[a]}{\Delta x}=1$$

当 a 是整数时，f 间断，f' 无定义。

例4 证明 f 在 a 点的导数可以用以下形式表示：

a) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

b) $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

证 a) 由定义 $f'(a)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$。

令 $a+\Delta x=x$，则 $\Delta x\to 0$ 时与 $x\to a$ 可以互推，于是上式 $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。

b) $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a-h)-f(a)}{-h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

由此 $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-(a-h)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]$$

$$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

故 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right]$$
$$=f'(a).$$

例5 设 $a>1$，并且f满足$|f(x)|\leqslant|x|^a$，证明 f 在点0是可导的。

证 从$|f(0)|\leqslant|0|^a$，知道 $f(0)=0$，

又 $$\left|\frac{f(h)}{h}\right|\leqslant|h|^{a-1}$$

又因 $a>1$，

故 $$\lim_{h\to 0}|h|^{a-1}=0.$$

于是 $$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0.$$

例6 设 $0<\beta<1$，f满足$|f(x)|\geqslant|x|^\beta$及$f(0)=0$，证明f在点0是不可导的。

证 $|f(h)/h|\geqslant|h|^{\beta-1}$，

因 $\beta-1<0$，

故 $$\lim_{h\to 0}|h|^{\beta-1}=\infty,$$

因而
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$$不存在，也就是 f 在点0不可导。

上述几个例题都是从导数定义证明导数是否存在，下面几个例题是从定义出发证明导函数的一些性质。

例7 证明：

a) 如果 $g(x)=f(x)+c$，则 $g'(x)=f'(x)$；

b) 如果 $g(x)=f(x+c)$，则 $g'(x)=f'(x+c)$；

c) 如果 $g(x)=f(cx)$，则 $g'(x)=cf'(cx)$ $(c\neq 0)$。

证 只证 c)

$$g'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(cx+ch)-f(cx)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{c[f(cx+ch)-f(cx)]}{ch}$$，设 $ch=k$，当 $h\to 0$ 时 $k\to 0$。

$$\therefore\quad g'(x)=\lim_{k\to 0}\frac{c[f(cx+k)-f(cx)]}{k}$$

$$=c\lim_{k\to 0}\frac{f(cx+k)-f(cx)}{k}=cf'(cx).$$

例8 证明：

a) 若 f 是奇函数，则 f' 是偶函数；

b) 若 f 是偶函数，则 f' 是奇函数；

c) 若 f 是以 ω 为周期的周期函数，则 f' 也是以 ω 为周期的函数。

证 a) 设 $g(x)=f(-x)$，

则根据例 7-c) $g'(x)=-f'(-x)$，

但　　$g(x)$又等于$-f(x)$，

故　　$g'(x)=-f'(x)$，

于是　$f'(x)=f'(-x)$。

b) 证明从略。

c) 设　$g(x)=f(x+\omega)$，

则由例7-b)　知$g'(x)=f'(x+\omega)$；

但因　　$f=g$，

故　　$f'(x)=g'(x)=f'(x+\omega)$，对于所有x。这意味着f'是以ω为周期的周期函数。

注：这题借助于例7，其实，直接证明，也不困难。

例9　设$f(a)=g(a)$

并且　$f'_-(a)=g'_+(a)$。

定义：

$$H(x)=\begin{cases} f(x), & x\leqslant a, \\ g(x), & x\geqslant a. \end{cases}$$

证明H在a点可导。

证　$H'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{H(a+h)-H(a)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'_+(a).$$

$$H'_-(a)=\lim_{h\to 0^-}\frac{H(a+h)-H(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'_-(a).$$

由　　$f'_-(a)=g'_+(a)$，

得知

$$\lim_{h\to0}\frac{H(a+h)-H(a)}{h}存在。$$

可导函数必然连续，然而连续函数未必可导，未曾受过严格训练的学生，往往随便使用一个定理的逆命题而不问逆命题是否成立，因此应使学生对于定理的逆述语有所警惕。学生既然在这方面缺乏感性知识，就要我们在习作课上举例题，摆事实。

例10　证明函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant0,\\ x\sin\dfrac{\pi}{x}, & x>0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 点连续，但是在这点不可导。

证　显然　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0=f(0)$，所以函数在 $x=0$ 连续。

当 $x>0$ 时，

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x\sin\dfrac{\pi}{x}}{x}=\sin\frac{\pi}{x}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to0}\sin\dfrac{\pi}{x}$不存在，所以 $f'_+(0)$ 不存在，从而 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导（纵然 $f'_-(0)=1$）。

通常见到的函数 $f(x)$ 多半在一个区间 D 上处处连续或处处可导（即在D上每点连续或可导），这些是较正规的情

形。然而函数的连续性和可导性只是局部性质，一个函数在某一区间不一定那样正规，为了指导学生主动地思考问题和突出连续与可导的局部性，应该把函数的连续、可导的存在和导函数的连续诸问题中出现的情况的多样性适当展示给读者。

例11　证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\text{ 为有理数,} \\ 0, & x\text{为无理数,} \end{cases}$$

只在 $x=0$ 点连续。

证

读者易证 f 在 $x=0$ 连续。

当 $x_0\neq 0$ 是有理数时，$f(x_0)=x_0\neq 0$。

取一个收敛于 x_0的无理数列$\{x_n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} 0=0\neq f(x_0).$$

当　x_0是无理数时，$f(x_0)=0$，

取一个收敛于 x_0的有理数列$\{x_n\}$，则

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} x_n=x_0\neq f(x_0).$$

合并两种情形，得到 $x_0\neq 0$ 时 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，这说明函数 $f(x)$ 在 $x=0$连续，而在 $x=0$附近的任何一点都不连续。

例12　证明函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\text{为有理数,} \\ 0, & x\text{为无理数,} \end{cases}$$

只在 $x=0$ 可导，

证明从略，这题说明函数 f 只在 $x=0$ 一点可导，在 $x=0$ 附近任何一点都不可导。

对于任何函数 f，取其导数，得到一新函数 f'（它的定义域可以远小于 f 的定义域），连续函数 f 虽然处处可导，但导函数不一定处处连续。

例13 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0. \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

求 $f'(x)$，并讨论导函数 f' 在 $x=0$ 的连续性。

解 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$.

$$\text{当}x=0\text{时}, f'(0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=0.$$

$$\therefore\quad f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0. \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

显然，导函数在 $x=0$ 不连续，此外处处连续。

上面虽然举出13个例题，但主要是用导数定义求函数的导数，或证明函数或导函数某些性质。这些例题作为一次习题课内容，可以选某些例题达到上述要求。

§2 微分法

基本要求：

求函数的导数，首先要用导数的定义，这里要求能成功

地处理某些函数的极限问题，课本里就这样推得了基本初等函数的导数公式，这些公式的推导过程都是学习的榜样，不能只记公式忘却过程，复杂函数的导数是由基本初等函数的导数经过加、乘、除运算以及复合函数的求导而成的，尽管这些计算方法是机械的方法，还必须要求学生精心计算，要算得快、算得准确。

微分法的基本内容：

1．显函数的求导方法：（1）按照导数定义求导；（2）应用导数的基本公式求导；（3）应用导数运算法则求导；（4）复合函数求导；（5）反函数求导。

2．隐函数求导。

3．参数方程确定的函数求导。

上述各类求导中，多重复合函数求导最容易出错。但只要要求学生按照次序逐次求导，耐心、细致经过多次练习，在速度和准确性上是可以达到要求的。习作课上要作几个例题示范，一步步讲清楚。

求下列函数的导数：

例1 $y=\ln\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)$.

解 $$y'=\frac{1}{\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}\cdot\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}\cdot\frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$=\frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}}.$$

例2 $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

解 $y' = \frac{1}{\ln^2(\ln^3 x)} \cdot 2\ln(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\ln^3 x} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}$

$$= \frac{6}{x\ln x\ln(\ln^3 x)}.$$

例3 $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

解 $y = (x + (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$

$$y' = \frac{1}{2}\left[x + (x + x^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{1}{2}(x + x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(1 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x + \sqrt{x}} + 4\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x + \sqrt{x}}\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}$$

以上三例，都以链导公式为训练中心，下列两例函数表达式中兼有代数运算。

例4 $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

解 $y = e^{\cos x \ln \sin x} + e^{\sin x \ln \cos x}$

$$y' = e^{\cos x \ln \sin x}\left(-\sin x \ln \sin x + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \cos x\right) + e^{\sin x \ln \cos x}\left(\cos x \ln \cos x + \sin x \frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= (\sin x)^{\cos x}\left[-\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x}\right]$$

$$+(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x \ln \cos x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$$

例5 $y=\frac{a^x}{1+a^{2x}}-\frac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arc\,tg} a^{-x}$.

解 令 $a^x=u$，则

$$y=\frac{u}{1+u^2}-\frac{1-u^2}{1+u^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{u}.$$

这样先将原式简化一下，计算工作分两步走，可以减少错误，最后得

$$y'=\frac{4\ln a\, a^x}{(1+a^{2x})^2}\operatorname{arc\,tg} a^{-x}.$$

求下列各函数 f 的 $f'(x)$（要求学生在 20 分钟内作完）.

（1） $f(x)=\sin^2((x+\sin x)^2)$;

（2） $f(x)=\sin(6\cos(6\sin(6\cos 6x)))$;

（3） $f(x)=\sin\left(\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)}\right)$;

（4） $f(x)=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$

$(0\leqslant |a|<b)$;

（5） $f(x)=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$;

（6） $f(x)=x+x^x+x^{x^x}$;

(7) $f(x)=\frac{1}{2}\text{arc tg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$;

(8) $f(x)=e^{e^{e^{e^{x}}}}$;

(9) $f(x)=\text{arc tg}(x+\sqrt{1+x^2})$;

(10) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right)$.

上述题目的答案：

(1) $f'(x)=[2\sin((x+\sin x)^2)]\cos((x+\sin x)^2)$
$\cdot 2(x+\sin x)\cdot(1+\cos x)$;

(2) $f'(x)=\cos(6\cos(6\sin(6\cos 6x)))$
$\cdot 6(-\sin(6\sin(6\cos 6x)))$
$\cdot 6\cos(6\cos 6x)$
$\cdot 6(-\sin 6x)\cdot 6$;

(3) $f'(x)=\cos\left[\frac{x^3}{\sin\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)}\right]\cdot$

$$\cdot\frac{3x^2\sin\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)-x^3\left(\cos\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)\right)\left(\frac{3x^2\sin x-x^3\cos x}{\sin^2 x}\right)}{\sin^2\left(\frac{x^3}{\sin x}\right)};$$

(4) $f'(x)=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a+b\cos x}$;

(5) $f'(x)=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}$;

(6) $f'(x)=1+x^x(1+\ln x)+x^x x^{x^x}$

$$\cdot\left(\frac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right);$$

(7) $f'(x)=-\dfrac{1}{x\sqrt[4]{(1+x^4)^3}}$;

(8) $f'(x)=e^{e^{e^{e^x}}}\cdot e^{e^{e^x}}\cdot e^{e^x}\cdot e^x$;

(9) $f'(x)=\dfrac{1}{2(1+x^2)}$;

(10) $f'(x)=-\dfrac{1+x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}}{(1+x\ln x)\left(1+x\ln\left(\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{1}{x}\right)\right)}$

§3 微分学基本理论

基本要求：

函数在一点的导数，只反映函数在这点近旁的性质，所以导数是局部性质，但是研究工作中又常常要用函数全局性质，于是要从导数给出的局部性质，推出函数在整个定义域

上的性质，这就要利用微分中值定理来达到这个目的，因此，必须体会微分中值定理的这个作用，进而希望能运用中值定理。

微分中值定理给出区间端点函数值与某内点导数值的关系，用它可从f'的某些性质推出f的某些性质。

微分中值定理：如果f在$[a, b]$上连续，且在(a, b)上可微，则在(a, b)内存在着一数x使

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (1)$$

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$与$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$是同一个关系的两种写法；提起导数，会想到，$f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，这时候谁也不敢说$f'(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$，$f'(x)$只能是$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$当$h\to 0$时极限值，所以说导数是局部性的概念。$\frac{f(b)-f(a)}{a-b}$是$f(x)$在整个区间$(a, b)$上的平均变化率，现在说有一个$x\in(a, b)$使(1)成立，这就在函数在一点的导数与全局性的平均变化率之间建立了一个关系，用导数解决全局性问题往往要利用这个关系。

中值公式有许多方面应当考虑，要理解它的许多变态才能灵活运用它：

(i) 公式(1)中不必拘于$a<b$。

(ii) 公式(1)虽然是就闭区间说的，但是只要 f 在开区间（有限或无限）上处处有导数，在 (a, b) 内的任何两点 x_1，x_2 都可以代替 a，b。在 x_1，x_2（不必要考虑 x_1，x_2 的顺序）之间总有一个 x 满足

$$f'(x)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}.$$

例 1 若 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

分析 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$，要用 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上的一切值，或者在 $(x_0, +\infty)$ 的子区间 $[M, +\infty)$ $(M>x_0)$ 上的一切值，在 $f(x)$ 没有具体表达式的情形下，要从已知条件里想办法，因为假设条件牵涉到了 $f'(x)$，于是想到用下式表示 $f(x)$：

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$$

然后

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+\left|f'(\xi)\right|\left(1-\frac{x_0}{x}\right)$$

$$<\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|+\left|f'(\xi)\right|$$

x 很大时，$\left|\frac{f(x_0)}{x}\right|$ 在我们掌握之中可以很小，但是不敢说 $x\to\infty$ 时 $\xi\to\infty$，这样就不能控制 $|f'(\xi)|$，把思路改变一下，先使 x 大到适当的程度，保证 $|f'(x)|$ 小到我们心目中的小正数，就可以控制 $|f'(\xi)|$ 的数值了，由此想到下面的证法。

证：因为$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$，

$\therefore$ $\forall \varepsilon>0$，$\exists M>0$，不妨设$M>x_0$，$\forall x>M$有

$$\left|f'(x)\right|<\varepsilon/2$$

在区间$[M,x]$上，f满足中值定理的条件，所以

$$\frac{f(x)-f(M)}{x-M}=f'(\xi),\quad M<\xi<x$$

或者 $\qquad f(x)=f(M)+f'(\xi)(x-M)$

所以 $|f(x)|\leqslant|f(M)|+\frac{\varepsilon}{2}(x-M)$，

进而

$$\frac{|f(x)|}{x}\leqslant\frac{|f(M)|}{x}+\frac{\varepsilon}{2}\left(1-\frac{M}{x}\right)$$

$$<\left|\frac{f(M)}{x}\right|+\frac{\varepsilon}{2},\ (\text{因}0<1-\frac{M}{x}<1)$$

我们总能找到一个$X>0$，不妨设$X>M$，当$x>X$时，有

$$\frac{|f(M)|}{x}<\frac{\varepsilon}{2}$$

$\therefore$ 当$x>X$时

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$。

下面例题是已知f的性态，通过中值定理推导出f'的性态。

例 2 证明 (i) 若(a, b)内的可微函数$f(x)$无界，则$f'(x)$在(a, b)内也无界。

(ii) 若(a, b)改为$(a, +\infty)$或$(-\infty, b)$原命题成立吗?

(iii) (i) 的逆述语成立吗?

分析 函数可微时，必然连续，在区间之内可微便在区间之内连续，这样函数仅能在区间的端点无界，函数是否有界，属于值域的性质，是大范围性质，现在是由$f(x)$的大范围性质讨论$f'(x)$的大范围性质，连结着函数值与导数值的基本关系是导数定义。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x-h}=f'(x).$$

然而这不是函数值与导数值的纯正等式。于是使我们想到中值公式(1)，不巧这里又碰到本题条件中的弱点——$f(a)$可能不存在。转想到中值定理可以用于(a, b)的任何子区间，那么就可以取(a, b)的任意一点x_0代替a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi) \tag{2}$$

$x\in(a, b)$，ξ介于x_0与x之间。

这里左端分子无界，分母的绝对值$|x-x_0|<b-a$有界，所以$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$无界，从而$f'(\xi)$无界。

(ii) 当$f(x)$的定义域为$(a, +\infty)$时，(2)式左端的分母也无界，这分式可能有界，实际只要$f(x)$与x是同级或低级的无穷大就能使$f'(\xi)$有界，最简的是$f(x)=x$。

（iii）定义在 (a, b) 上的函数 $f(x)$，如果导函数 $f'(x)$ 在 (a, b) 上无界，则 $f(x)$ 在 (a, b) 上无界。

上述结论不能成立，如果(2)式的 $f(x)-f(x_0)$ 是 $x-x_0$ 的低级无穷小，当 $x\to x_0$ 时 $f(x)-f(x_0)\to 0$，而 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\to\infty$。例如 $f(x)=\sqrt{x}$，$x\in(0, 1)$ 当 $x=0$ 时 $f(x)=0$，而 $f'(x)=\infty$。

注：根据以上分析，三种情况的证明中（ii）（iii）两条只举反例就可以了。而（i）用反证法往往显得利索，可以如下证之：

若 $f'(x)$ 在 (a, b) 内有界，则 $\exists M>0$，使 $|f'(x)|\leqslant M$，$x\in(a, b)$。选定 $x_0\in(a, b)$，$\forall x\in(a, b)$，在 $[x_0, x]$ 或 $[x, x_0]$ 内 f 满足中值定理条件，则

$|f(x)-f(x_0)|=|f'(\xi)(x-x_0)|\leqslant M|x-x_0|<M(b-a)$，$\xi$ 在 x 与 x_0 之间。

$\therefore\quad |f(x)|=|f(x)-f(x_0)+f(x_0)|<|f(x_0)|+M(b-a)$ 这说明 $f(x)$ 在 (a, b) 内有界，与已知条件矛盾。

$\therefore\quad f'(x)$ 在 (a, b) 内无界。

例 3　若 $f(x)$ 在 (a, b) 可导，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$（$a$，$b$ 均为有限数或无穷大），证明 $\exists\,\xi\in(a, b)$ 使 $f'(\xi)=0$。

证　a）当 a，b 皆为有限数时，令

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & a<x<b, \\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A, & \text{当 } x=a \text{ 或 } x=b \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续，在 (a, b) 可导，且 $F(a)=F(b)$，根据罗尔定理 $\exists\,\xi\in(a, b)$ 使 $F'(\xi)=0$，而 $f(x)\equiv F(x)$，

$x\in(a, b)$，

$$\therefore f'(\xi)=F'(\xi)=0.$$

b) 当a，b中有一个或两个为无穷大时。

i) 若 $f(x)\equiv A$，则结论显然成立。

ii) 若 $f(x)\not\equiv A$，则$\exists x_0$使 $f(x_0)\neq A$，不妨设$f(x_0)>A$。

根据 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$。设法找 x_1，x_2 使 $f(x_1)=f(x_2)$.任取一数 B 满足$A<B<f(x_0)$，因为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A<B$，所以$\exists X>0$，当$x\geqslant X$ 时或$x\leqslant -X$ 时，$f(x)<B$。根据连续函数介值定理$\exists x_1\in(-X, x_0)$及$x_2\in(x_0, X)$使 $f(x_1)=f(x_2)=B$，而$f(x)$在$[x_1, x_2]$连续在(x_1, x_2)可微，$\therefore\exists\xi\in(x_1, x_2)$，使$f'(\xi)=0$。

若a，b中有一个是有限数，当一个是∞时，证法类似。

例 4 若f在x_0连续，在$(x_0, x_0+\delta)$ $(\delta>0)$ 可微，且 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f'(x)=A$，则 $f(x)$在 x_0有右导数，且$f'_+(x_0)=A$。

证 任取 $0<\Delta x<\delta$，显然 $f(x)$在$[x_0, x_0+\Delta x]$连续，在$(x_0, x_0+\Delta x)$可微，则

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0+\theta\Delta x)$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}f'(x_0+\theta\Delta x)=A,\ (\text{因}\lim_{x\to x_0+0}f'(x)=A)$$

$$\therefore\quad f'_+(x_0)=A.$$

使用中值定理要注意条件。例如，如果在区间内部的一个点上导数不存在，则中值定理不一定成立，这从 $f(x)=|x|$一例中不难看出。但是，即使函数的定义域比较复

杂，只要它满足中值定理的条件，我们就可判断定理的结论成立。

例 5 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x} & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$$

研究函数 f 在 $[0, 2]$ 上能运用中值定理的可能性，如可能，求出 ξ。

解 当 $x\neq 1$ 时，f 显然可导，

当 $x=1$ 时，利用导数定义不难证明

$f'_-(1)=f'_+(1)=-1$。

$\therefore$ $x=1$，f 可导，对于 f 可以应用中值定理。

$$\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(\xi)$$

而 $f'(x)=\begin{cases}-x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$

那么

$$\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}}{2}=\begin{cases}-\xi, & 0\leqslant \xi\leqslant 1,\\ -\dfrac{1}{\xi^2}, & 1<\xi\leqslant 2,\end{cases}$$

由此得：$\xi_1=\dfrac{1}{2}$，$\xi_2=\sqrt{2}$。

例 6 1）假设 f 在 $[a, b]$ 上可微，证明：若 f 在 $[a, b]$ 上的最小值在 a 处取得，则 $f'(a)\geqslant 0$，如果它在 b 处取

得，则$f'(b)\leqslant 0$。

2）假设$f'(a)<0$和$f'(b)>0$，证明：对于(a,b)内的某个x有$f'(x)=0$。

3）证明：若$f'(a)<c<f'(b)$，则对于(a,b)内的某个x有$f'(x)=c$（这个结果称为达布定理）。

证明 1）因为a是f在$[a,b]$上的最小点，对于所有足够小的$h>0$我们有

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\geqslant 0.$$

当$h\to 0$时得到$f'(a)\geqslant 0$，对于$f'(b)\leqslant 0$的证明是类似的。

2）根据假设$f'(a)<0$和$f'(b)>0$，于是由1）知f在点a或点b不可能取得最小值。因此，f的最小值出现在(a,b)内的某点，于是$f'(x)=0$。

3）设$G(x)=f(x)-cx$，则$G'(a)=f'(a)-c<0$和$G'(b)=f'(b)-c>0$。于是根据2)，对于(a,b)内的某个x有$G'(x)=f'(x)-c=0$，得到$f'(x)=c$。

§4 泰勒公式

泰勒公式是将函数展开成类似多项式的一个重要公式，系数的计算规律简明优美，不仅如此，这个公式对于函数的近似计算和理论探讨都是很重要的工具，读者必须熟记基本初等函数的展开式。

若$f(x)$在包含x_0的一个区间$[x_0,x_0+H]$上连续，在(x_0,x_0+H)（其中$H>0$）内有$n+1$阶导数，$f(x)$便能在(x_0,x_0+H)里按泰勒公式展开为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\quad 其中R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\times$$

$(x-x_0)^{n+1}$，ξ在x与x_0之间。这公式对于区间〔x_0-H, x_0〕一样地适用，$R_n(x)$称为拉格朗日余项。

如果从无穷小的阶次上考虑余项，也时常写为$R_n(x)=o(x-x_0)^n$。称为皮亚诺余项，在写出皮亚诺余项的泰勒公式时，只要求f在x_0点有n阶导数存在。

由于余项$R_n(x)$是表示f展为多项式后的精确度，当然我们希望当$n\to\infty$时，在x_0的某个邻域里$R_n(x)\to 0$，这个问题在幂级数一章详细讨论。

若f的$n+1$阶导数$f^{(n+1)}$在包含x_0的一个闭区间上连续，则
$$|f^{(n+1)}(\xi)|\leqslant M.$$
于是

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}M.$$

所以当n固定时，泰勒多项式$R_n(x)=f(x_0)+$

$$+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$给出了函数f的一个近似式，当x趋近x_0时，其误差至少是关于$(x-x_0)$的$n+1$阶无穷小。

对于基本初等函数在$x_0=0$点的泰勒公式要牢记，它是

展开其它函数的基础。本单元的训练目标，侧重在函数的展开，附带提示一些展开函数的技巧。

例 1 按照指定的x_0和次数，求下列函数的泰勒多项式：

(1) $f(x)=e^{\sin x}$，展开到含x^2的项；

(2) $f(x)=\ln(1+x)$，展开到含$(x-2)^n$的项；

(3) $f(x)=x^6+x^2+x$，展开到含$(x-1)^4$的项；

(4) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$，展开到含x^n的项；

(5) $f(x)=\ln\dfrac{\sin x}{x}$，展开到含$x^6$的项，并写出皮亚诺余项。

解 (1)—(4)计算从略。

(5) $$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+o(x^7)$$

$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)$$

$\therefore$ $$\frac{\sin x}{x}-1=-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)$$

已知：$\ln(1+y)=y-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{y^3}{3}+o(y^3)$。

$\therefore$ $$\ln\frac{\sin x}{x}=\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]$$

$$=\ln\left[1+\left(-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\right]\right.$$

$$=\left[-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\right]^2$$

$$+\frac{1}{3}\left[-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+o(x^6)\right]^3$$

$$=-\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{180}-\frac{x^6}{2835}+o(x^6)$$

例 2 (*a*) 若$f''(a)$存在，证明

$$f''(a)=\lim_{x\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$$

(*b*) 对于函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

验证$f''(0)$不存在，然而

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

存在。

证 (*a*) 这可由

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$

$$f(a-h)=f(a)-f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2+o(h^2)$$

推出。

(b) $f''(0)$不存在的验证，由学生补充。

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{h^2-h^2-0}{h^2}=0\text{。}$$

同样可以证明 $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)+f(0-h)-2f(0)}{h^2}=0$。

证明了上述极限存在。

近似计算是泰勒公式的主要应用，这也是我们所熟习的三角函数表、对数函数表等的计算和理论基础。

例 3 讨论$\sin 29°$的线性近似误差。

解 $\sin x=\sin x_0+\cos x_0\,(x-x_0)-\frac{\sin\xi}{2!}(x-x_0)^2$，$\xi$在$x$与$x_0$之间。

取 $x_0=\frac{\pi}{6}$，

$$\sin 29°\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{29\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\approx 0.5-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180}=0.5-0.01512\approx 0.4849\text{。}$$

而 $R_2(x)=\frac{-\sin\xi}{2}(x-x_0)^2<0$。

$$\therefore\quad |R_2(x)|<\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{180}\right)^2=\frac{9.86965}{64800}<0.0001$$

于是得到

$$0.4848<\sin 29^\circ<0.4849.$$

§5 “待定型”的确定

求函数的极限是数学分析中的艰巨任务，到目前为止除个别函数极限如 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 用特殊方法证明外，很大一类函数极限是利用初等函数的性质（连续性、极限性质）及极限运算法则求出的，例如

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x^2+5)\operatorname{arctg}x}{e^x}=\frac{6\cdot\frac{\pi}{4}}{e}=\frac{3\pi}{2e}$;

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2+\frac{x-1}{x+1}\sin x\right)=+\infty$;

3. $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}-0)}x^{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2}-0)}e^{\operatorname{tg}x\ln x}=+\infty$.

这些极限都是可以直接确定的，此外，还有所谓的“待定型”，即以下几种形式：

“$\frac{0}{0}$”，“$\frac{\infty}{\infty}$”，“$\infty\cdot 0$”，“$\infty-\infty$”“∞^0”“0^∞”，“1^∞”。其中

$\frac{0}{0}$和$\frac{\infty}{\infty}$是基本的两类，其它类型可以化为这两种类型。确定待定型的极限，有两种基本方法，其一是用洛比达法则，

其二是将原式中某些（较复杂的）函数换作它的泰勒展开式（带皮亚诺余项），经过化简然后求极限。在应用上述两种方法求极限时，往往把某个无穷小换作它的等价无穷小，也时常进行无穷小的四则运算，这类技能，大致有以下这些：

1．有关无穷小的四则运算：对于$x>0$

(1)　当　$0<m\leqslant n$时，$o(x^m)\pm o(x^n)=o(x^m)$。

(2)　$x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$。

(3)　$o(x^m)\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$。

(4)　$m\geqslant n$时，$\dfrac{o(x^m)}{x^n}=o(x^{m-n})$。

2．几个常用的等价无穷小。

当$x\to 0$时，与x等价的无穷小。

(1)　$\sin x\sim x$；

(2)　$\mathrm{tg}x\sim x$；

(3)　$\ln(1+x)\sim x$；

(4)　$e^x-1\sim x$；

(5)　$(1+x)^a-1\sim ax$。

3．当$x\to+\infty$时，指数函数，幂函数与对数函数的比较。

(1)　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{ax}}{x^\beta}=\infty$，　$(a,\beta>0)$，

(2)　$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\beta}{\ln^\gamma x}=\infty$，　$(\beta,\gamma>0)$。

例 1　求　$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$。

解　用洛必达法则进行计算得：

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{2}=3.$$

然而在$x\neq 1$时，$\frac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}=\frac{x^2+x+2}{x-2}\to -4$.前面的解法错在何处?

必须分式的子母都趋于0 (或∞)时，才可以考虑用洛必达法则。现在第二步中的分子 $3x^2+1$ 和分母 $2x-3$ 都不$\to 0$，那么下一步的 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2+1}{2x-3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{6x}{2}$就错了。可见连续使用洛必达法则，必须步步检查，不许盲目动手。

凡一元有理分式待定型，都是因为分子与分母有$(x-a)^k$形式的最高公因子。如使用洛必达法则，必须使用k次才能把问题解决，所以这类题用洛必达法则反而麻烦。

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$.

解法 1 所给分式符合洛必达法则的条件，是$\frac{0}{0}$型的待定型。

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^2}{3x^2\sin x+x^3\cos x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x\sin x+x^2\cos x}$$ ($\frac{0}{0}$型待定型)

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x^2}{(3-x^2)\sin x+5x\cos x}\quad\left(\frac{0}{0}\right.$$

型待定型)

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-2x^2\sin x^2}{(8-x^2)\cos x-7x\sin x}\quad(\text{不是}$$

待定型了)

$$=\frac{1}{2}.$$

看到$\frac{0}{0}$型的待定型，应该尽可能地推测一下分子与分母的无穷小阶数，每用一次洛必达法则，分子分母齐降一阶，例如上题分母无疑是四阶的，$1-\cos x$是二阶无穷小，$1-\cos x^2$是x^2的二阶无穷小，是x的四阶无穷小，所以最多施用洛必达法则四次就能解决问题。在中途约去分子分母的一次公因式，就相当于使用一次洛必达法则。

解法 2 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x^2}{2}}{x^3\sin x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)}{\frac{x^2}{2}}\right)^2}{4\cdot\frac{\sin x}{x}}=\frac{1}{2}.$$

解法 3 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x^2}{3x\sin x+x^2\cos x}$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x^2}{x^2}}{3\dfrac{\sin x}{x}+\cos x}=\frac{1}{2}.$$

解法1单纯使用洛必达法则，无须多加思考，但是较繁琐。解法2开始作了三角函数的恒等变换，使得有可能应用已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 很快地求得了极限。解法3首先用洛必达法则；再作三角恒等变换也使计算得到简化，由此看出求极限的方法是多种多样的，应该要求学生作题时不要拘于一格，多想方法，求得最简捷的解法。

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解法1 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\cos(\sin x)-\cos x=0$， $\lim\limits_{x\to 0}x=0$ 所以本题极限是$\dfrac{0}{0}$待定型。

应用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\sin x)\cos x+\sin x}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(\sin x)\cos^2 x+\sin(\sin x)\sin x+\cos x}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)\cos^3 x+3\cos(\sin x)\sin x\cos x+\sin(\sin x)\cos x-\sin x}{24x}$$

$=\cdots\cdots$

$$=\frac{1}{24}\ (1+3-1+1)=\frac{1}{6}.$$

解法 2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\sin x+x}{2}\sin\dfrac{\sin x-x}{2}}{x^4}$$

$$=-2\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x+x}{2}}{x}\cdot\frac{\dfrac{\sin x-x}{2}}{x^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{3x^2}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{x}\right)^2=\frac{1}{6}.$$

将 $\sin\dfrac{\sin x\pm x}{x}$ 换作等价的无穷小 $\dfrac{\sin x\pm x}{2}$ 是使工作简化的关键，第三步把问题变为两个极限的乘积之后，由于第一个极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x}{x}$ 不是待定型，于是立即换为它的极限值2，也是使问题简化的因素。

例4　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x\,\mathrm{arctg}x-x^2}{x^6}$.

解　由 $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}x\,\mathrm{arctg}x-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^6=0$，知道这是$\dfrac{0}{0}$型，若用洛必达法则求极限，计算非常繁琐，现在借用泰勒公式展开求极限。

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}x\,\mathrm{arctg}x-x^2}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2}{15}x^5+o(x^6)\right]\left[x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}+o(x^6)\right]-x^2}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{9}x^6+o(x^6)}{x^6}=\frac{2}{9}.$$

例5　**求下列函数的极限。**

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^3\sin x}$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

解　(1)用$\cos x^2$的泰勒展开式，原分式得

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\left[1-\dfrac{(x^2)^2}{2!}+o((x^2)^2)\right]}{x^3[x+o(x)]}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^4}{2}+o(x^4)}{x^4+o(x^4)}=\frac{1}{2}$$

(2)用$\cos(\sin x)$的泰勒展开式代入原分式，得

$$\frac{1-\dfrac{(\sin x)^2}{2!}+\dfrac{(\sin x)^4}{4!}+o(\sin^4 x)-1+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^4}{4!}+o(x^4)}{x^4}$$

再将$\sin x$换为它的泰勒展开式得

$$\frac{-\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2+\frac{1}{24}(x+o(x))^4+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}(x^2-\frac{1}{3}x^4)+\frac{1}{24}x^4+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)}{x^4}$$

$$=\frac{1}{6}+\frac{o(x^4)}{x^4}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}=\frac{1}{6}$。

上面两题仍是例 2 和例 3，不过这里把某些函数换成了他们的泰勒展开式，然后求极限，在计算过程中要注意无穷小的计算和泰勒展开式的项数，比如在例 4 中$\mathrm{tg}x$和$\mathrm{arctg}x$只要展开到x^5项就够了，这是因为分母是x^6，这就要求分子的皮亚诺余项比x^6高级的无穷小。到此可以比较同一个题的不同解法，不管那种解法都要求读者认真、仔细不怕麻烦的进行计算。

下面再举几个例题，说明用泰勒公式可以解决很大一类函数的极限。

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$，$(a>0)$。

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}-2}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a^2}{2}+1-x\ln a+\frac{x^2\ln^2 a}{2}-2+o(x^2)}{x^2}$$

$=\ln^2 a$。

例7　求 $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\right]$。

这是∞－∞型的待定型，如要这样的待定型取得有限的极限值，必须两个无穷大是同阶的，现在$e^{\frac{1}{x}}$的极限是1，所以$\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}$对于$x$来说是三价无穷大，$\sqrt{1+x^6}=x^3\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$也是三阶的。为了解答这问题，显然用泰勒展开式换去$e^{\frac{1}{x}}$和$\sqrt{1+\frac{1}{x^6}}$方便些，两者都出现了$\frac{1}{x}$，从这一点共性来想，我们令$u=\frac{1}{x}$作变量替换或许方便些。

解　令$u=\frac{1}{x}$

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\left[\left(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u^2}+\frac{1}{2u}\right)e^u-\left(1+\frac{1}{u^6}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\frac{1-u+\frac{1}{2}u^2}{u^3}e^u-\frac{(1+u^6)^{\frac{1}{2}}}{u^3}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\left\{\frac{\left(1-u+\frac{1}{2}u^2\right)\left[\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}+o(u^3)\right]\right.}{u^3}\right.$$

$$-\frac{1+\frac{u^6}{2}+o(u^6)}{u^3}\Bigg\}$$

$$=\lim_{u\to 0}\left[\left(\frac{1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}-u-u^2-\frac{u^3}{2}+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}}{u^3}\right)\right.$$

$$\left.\frac{-1+o(u^3)}{u^3}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\frac{1}{6}u^3+o(u^3)}{u^3}=\frac{1}{6}.$$

这题可以要求读者不换变量，或令$x^6=\frac{1}{u}$再试一试。

例8 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$。

解 设$f(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$，由于$f(x)$是偶函数，可以假定$x>0$，先将$f(x)$取对数则

$$\ln f(x)=\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1-\cos x}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

是$0\cdot\infty$型待定型，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{1-\cos x}$$

是$\frac{0}{0}$型待定型，而后应用洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\ln f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\sin x-\ln x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x\sin x}{\sin^2 x+2x\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\frac{\sin x}{x}+2\cos x}$$

$$=-\frac{1}{3}.$$

这样，

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^{-\frac{1}{3}}.$$

§6 不等式的证明

研究数学分析很多工作是处理不等式的问题。对于不等式的证明我们必须有一定的能力，以下是我们经常用的方

法，通常要证明：$x \geqslant a$ 时，$f(x) \geqslant g(x)$，往往改作证明 $F(x)=f(x)-g(x) \geqslant 0$，如果$F(a)=0$，就先证明 $F'(x) \geqslant 0$，$(x \geqslant a)$. 由此断定 $F(x) \geqslant F(a)=0$，如果 $F'(x)$ 的符号不易确定，可以试探 $F''(x)$ 是否$\geqslant 0$，理由和前面一样。

例1 证明不等式

$$e^x-1>(1+x)\ln(1+x) \quad (x>0).$$

证 设$F(x)=e^x-1-(1+x)\ln(1+x)$

$F(0)=0$

而 $F'(x)=e^x-1-\ln(1+x) \quad (x>0)$,

$$F''(x)=e^x-\frac{1}{1+x}, \text{在 } (x>0) \text{ 时}, \frac{1}{1+x}<1, e^x>1.$$

$\therefore$ $F''(x)>0$，而$F'(0)=0$，所以$F'(x)>0$ 在$x>0$时，

$\therefore$ $F(x)$在$x>0$时上升。

因而 $F(x)>0 \quad (x>0)$;

由此得到

$$e^x-1>(1+x)\ln(1+x) \quad (x>0).$$

例2 证明不等式

$$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n \ (n \geqslant 2).$$

乍看时，这题该用数学归纳法证明，这样考虑的话，必须先知道

$$\ln(n+2)-\ln(n+1) \leqslant \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1)-\ln n.$$

或者

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\leqslant\frac{1}{n+1}\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

这使我们想到用对数函数的性质来证明它，左部不等式是 $\ln(1+x)\leqslant x$ 的特例，把 $\frac{1}{n}$ 换成 x，右部不等式就变为 $\frac{x}{1+x}\leqslant$ $\ln(1+x)$，两者集中起来写为：

$$\frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x.$$

这里自然要 $x>-1$，此外当且仅当 $x=0$ 时，才能使用等号，为了证明本题，只需知道

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x;\quad(x>-1,\ x\neq0)\qquad(1)$$

就够了，一旦证明了这不等式，就可以给本题写出下边的证明：

证 在（1）中令 $x=\frac{1}{m}$，得

$$\frac{1}{m+1}<\ln(m+1)-\ln m<\frac{1}{m},$$

再令 $m=1,\ 2,\cdots,n$。得到下面几个不等式：

$$\frac{1}{2}<\ln2-\ln1<1$$

$$\frac{1}{3}<\ln3-\ln2<\frac{1}{2}$$

……………………

$$\frac{1}{n}<\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n}.$$

取上列左部的前$n-1$个不等式相加，得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\ln n$$

两端各加1，得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n. \qquad (2)$$

取上列右部 n 个不等式相加，得

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \qquad (3)$$

证明不等式（2）和（3），拼在一起，便是

$$\ln(1+n)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$$

证明（1）可用导数，例如，设 $f(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$.

则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(x+1)^2}$$

对于$x>0$

$$\frac{1}{1+x}>\frac{1}{(x+1)^2}$$

故 $f'(x)>0$,（$x>0$）。令$f(0)=0$，故当$x>0$，$f(x)>0$。（对于$-1<x<0$，$f'(x)<0$，同样有$f(x)>0$）。

对于（1）式我们可以用下面的方法证明，写出供读者参考。

不等式（1）的另一证法分析：

要 $\ln(1+x)$ 与 x 或 $\frac{x}{1+x}$ 比较大小，可把 $\ln(1+x)$ 改造成类似有理分式的形式。由此想到 $\ln(1+x)$ 的泰勒公式，在 1 的近旁。

$$\ln(1+x)=\ln 1+\frac{x}{1+\theta x}=\frac{x}{1+\theta x},$$

$$(0<\theta<1,\ x>-1)$$

如果只考虑$x>0$的情形，（象本题所需要的）只从$1+x>1+\theta x>1$，便能解决问题，但是我们宁愿考虑得更广泛些，为此我们不妨作进一步的分析，我们希望

$x-\frac{x}{1+\theta x}$ 与 $\frac{x}{1+\theta x}-\frac{x}{1+x}$ 都不是负数，这两个差实际是 $\frac{\theta x^2}{1+\theta x}$ 与 $\frac{(1-\theta)x^2}{(1+\theta x)(1+x)}$，分子都不能是负数，所以我们希望知道分母都是正数，$x>-1$，暗含有 $1+x>0$，剩下要考虑 $1+\theta x$ 是否一定>0。$x\geqslant 0$时，无疑地 $(1+\theta x)>0$。

$$-1<x<0\text{时，}$$

从$x>-1$及 $0<\theta<1$，知道

$$\theta(1+x)>0\text{或}-\theta<\theta x,$$

于是
$$0<1-\theta<1+\theta x.$$

故 $x-\ln(1+x)=x-\dfrac{x}{1+\theta x}=\dfrac{\theta x^2}{1+\theta x}\geqslant 0$,

$$\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}=\frac{x}{1+\theta x}-\frac{x}{1+x}=\frac{(1-\theta)x^2}{(1+\theta x)(1+x)}\geqslant 0.$$

从这两个不等式推得

$$\frac{x}{1+x}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x.$$

撇开$x=0$改成强不等式，就是（1）。

（要求读者把本题论述中的分析字句去掉，写成简洁的综合式证明）

例3 设$f''(x)>0$，$x_i\in[a,b]$，（$i=1,2,\cdots,n$）

证明：$f\left(\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)\leqslant\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)$

证 令 $x_0=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{n}$

用$f(x)$在x_0点的泰勒公式表示$f(x_i)$，由于$f''(x)>0$，必然

$$f(x_i)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x_i-x_0) \qquad (1)$$

令$i=1,2,\cdots,n$，将所得的n个不等式相加，得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)&\geqslant nf(x_0)+f'(x_0)\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_0)\\&=nf(x_0)+f'(x_0)\left[\sum_{i=1}^{n}x_i-nx_0\right]\\&=nf(x_0)\end{aligned}$$

4. $f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$.

例如，设$f(x)=-\ln x$，$(x>0)$，则f满足本题的假设条件。

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)=-\ln\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\left[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right]=-\ln(x_1\cdot x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}$$

根据本题的结论，知道

$$\ln\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant \ln(x_1\cdot x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

于是

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geqslant (x_1\cdot x_2\cdots x_n)^{\frac{1}{n}} \quad (x_i>0).$$

这是第一章§4里费了好大力气证过的定理。现在，用函数的性质，很容易地把它证明了。和前一例题一样，都是应用泰勒公式，读者应该在这类事例上多加注意。

例4 证明不等式

$$\frac{1-x}{1+x} < e^{-2x}, \quad 0<x<1.$$

证 所要证的不等式，两端取对数后用对数函数的上升性(或指数函数)。这样，我们就可以对于$\ln(1+x)$与$\ln(1-x)$用泰勒公式展开

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3!(1+\xi_1)^3},\ 0<\xi_1<x<1.$$

$$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3!(1-\xi_2)^3},\ 0<\xi_2<x<1.$$

$$\ln\frac{1-x}{1+x}=\ln(1-x)-\ln(1+x)$$

$$=-2x-\frac{x^3}{3!}\left[\frac{2}{(1+\xi_2)^3}+\frac{2}{(1-\xi_1)^3}\right]<-2x$$

$$\therefore\quad \frac{1-x}{1+x}<e^{-2x}.$$

注：既然 $1+x$，e^x 都 >0，把原式改为 $(1-x)e^x<(1+x)e^{-x}$，用泰勒公式展开 e^x 与 e^{-x} 也可以证明。

例5 证明不等式

$$\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3},\ (x>0).$$

证 设 $F(x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)$，

$$F'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x},\ 且\ F'(0)=0,$$

$$F''(x)=-1+2x+\frac{1}{(1+x)^2},\ 且\ F''(0)=0.$$

$$F'''(x)=2-\frac{2}{(1+x)^3}=2\left[1-\frac{1}{(1+x)^3}\right]>0,\ (x>0).$$

由$F''(0)=0$和$F'''(0)>0$知道$F''(x)>0$，$(x>0)$，

由$F'(0)=0$，$F''(x)>0$知道$F'(x)>0$，$(x>0)$，

再由$F(0)=0$，$F'(x)>0$知道$F(x)>0$，$(x>0)$，

于是原不等式得证。

注：前题从原则上说，用高阶导数证明，实际上，由

$F'(x)=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}>0 \quad (x>0)$，就已经足以达到证明的目的，因此在用高阶导数之前，对于既得的一阶导数进行审查，有可能取得容易的证法。

单调上升与单调下降在理论上处于对等的地位，用单调上升证明$F(x)>0$，无非是说$F(x)$的值一定大于起点的值，那么我们又可以说单调下降时$F(x)$的值一定大于终点的值，只要终点上不是负值，就可以保证$F(x)>0$。不仅如此，如果函数有时单调上升，有时单调下降，显然我们可以分段考虑。

例如：证明不等式：$\sin x>\frac{2}{\pi}x$，$\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$。

设$F(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$，$F(0)=0$，

$$F'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},$$

所以当$0<x<\arccos\frac{2}{\pi}$时，$F'(x)>0$，

当$\arccos\frac{2}{\pi}<x<\frac{\pi}{2}$时，$F'(x)<0$。

这两个不等式说明$F'(x)$在$\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$上变号。但是仍然可以不用高阶导数来证明$F(x)>0$。因为，当$0<x<\arccos\frac{2}{\pi}$，$F'(x)>0$，所以$F(x)$上升。

$$\therefore\ F(x)>F(0)=0.$$

当$\arccos\frac{2}{\pi}<x<\frac{\pi}{2}$时，$F'(x)<0$，所以$F(x)$下降。但下降到最低处时才有$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-1=0$，

$\therefore\quad F(x)>F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ 所以当$0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$时，$F(x)>0$，

$$\therefore\quad \sin x>\frac{2}{\pi}x.$$

上面例题因为$x>0$，可改作证明：

$F(x)=\frac{\sin x}{x}-\frac{2}{\pi}>0$，这时$F'(x)=\frac{\cos x(x-\operatorname{tg}x)}{x^2}<0$，

$$\left(0<x\leqslant\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore\quad F(x)\text{ 在}\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right]\text{内严格下降。}$$

$$\therefore\quad F(x)>F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

即 $\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$,　　　$0<x<\frac{\pi}{2}$.

例6　证明不等式：

$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$，当$0\leqslant x\leqslant 1$，$p>1$.

证　设$F(x)=x^p+(1-x)^p$，在[0，1]上连续，必有最大或最小值。

由$F'(x)=px^{p-1}-p(1-x)^{p-1}=0$，求得 $x=\frac{1}{2}$，这是$F(x)$的唯一稳定点。

由于 $F(0)=F(1)=1$，$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}<1$.

$\therefore\quad \max\limits_{0<x<1} F(x)=1,\qquad \min\limits_{0<x<1} F(x)=\frac{1}{2^{p-1}}$.

$\therefore\quad \frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,\ 0\leqslant x\leqslant 1$.

证明不等式时要注意它里边是否许可有等号，这决定于函数f是否严格单调。

例7　就上升函数来说，若$f'(x)>0$，则$f(x)$一定是严格上升的。若$f'(x)\geqslant 0$，则$f(x)$单调上升，但也可能是严格上升。

例如 $f(x)=x+\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$

$f'(x)=1+\cos x\geqslant 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$

在$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$时，$f'(x)=0$，但是$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上

是严格上升的。

例8 定理：若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 可导，并且

（1）$\forall x\in(a, b)$，$f'(x)\geqslant 0$。

（2）$f'(x)$ 在 (a, b) 的任一子区间内不恒为零。则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上严格上升。

证 由微分中值定理，容易推出 $f(x)$ 在 (a, b) 内单调上升，也就是 $\forall x_1, x_2\in[a, b]$，而且 $x_1<x_2$ 时，

$$f(x_1)\leqslant f(x_2).$$

现在证明"="的情形不能成立，否则 $\forall x\in[x_1, x_2]$

$$f(x_1)=f(x)=f(x_2).$$

这将要导致与已知条件（2）矛盾的结果

$$f'(x)\equiv 0,\ x\in(x_1, x_2).$$

例9 证明不等式：

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{1/\alpha}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}},\ (x>0,\ y>0,\ 0<\alpha<\beta).$$

证 $x=y$ 时，不等式变为

$$(2x^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(2x\ )^{\frac{1}{\beta}}$$

化简得：$2^{\frac{1}{\alpha}}>2^{\frac{1}{\beta}}$，显然成立，现在着重讨论 $x\neq y$ 的情形。

不妨设 $y>x>0$，即 $a=\dfrac{y}{x}>1$。

令 $F(u)=(x^u+y^u)^{\frac{1}{u}}$，$u>0$。

原不等式变为

$$F(\alpha)>F(\beta),\ 0<\alpha<\beta. \tag{1}$$

为此需要证明 $F(u)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格下降。

$$F(u)=\left\{x^u\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^u\right]\right\}^{\frac{1}{u}}=x\{(1+a^u)\}^{\frac{1}{u}}.$$

设 $F_1(u)=(1+a^u)^{\frac{1}{u}}=e^{\frac{1}{u}\ln(1+a^u)}$

因为 x 是常数，所以能证 $F_1(u)$ 严格下降就成了，为此要证

$$F_1'(u)=F_1(u)\left[-\frac{1}{u^2}\ln(1+a^u)+\frac{1}{u}\cdot\frac{a^u\ln a}{1+a^u}\right]<0.$$

撇开右端的正因数 $F_1(u)$，我们看

$$\frac{1}{u}\cdot\frac{a^u\ln a}{1+a^u}<\frac{1}{u^2}\ln(1+a^u)$$

是否成立，经过简单的变形，就成了显然成立的不等式。

$a^u\ln a^u<(1+a^u)\ln(1+a^u)$，（对于任何 $a>0$）．

$\therefore$ $F_1'(u)<0$，于是 $F'(u)<0$．这就证明了 $F(u)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下降．于是（1）式成立，从而原不等式得到证明．此例供参考，不作要求。

§7 函数的图象

作函数的图象时，讨论的步骤如下：

1．由函数的定义域或它的表达式确定图象的

（1）范围；

（2）间断点及连续区间；

（3）对称轴及对称中心，周期性．

2．由一阶导数确定图象的

（1）单调区间；

（2）稳定点。

3．由二阶导数确定图象的

（1）凸性；

（2）拐点。

4．定渐近线。

根据上面讨论，最后描点作图。

例1 作函数$y=e^{-x}$在$(-\infty,+\infty)$的图象。

解 (1) 函数$y=e^{-x}$在定义域$(-\infty,+\infty)$上连续。这函数无奇偶性和周期性，永远$y>0$，图形完全在上半平面内。

（2）$y'=-e^{-x}<0$，所以f在$(-\infty,+\infty)$下降，所以f没有极值点。

（3）$y''=e^{-x}>0$，所以f在$(-\infty,+\infty)$凸向下。

（4）$\because \lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0^{+}$，

$\therefore$ f以x—轴为渐近线。

（5）描点作图。

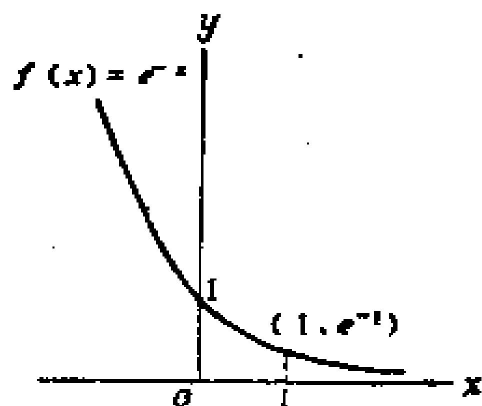


图 16

对于某些较复杂的函数图象，可以由求出函数的稳定点和拐点的横坐标，按其大小顺序划分区间，在每个区间上讨论函数的单调性和凸性。

例2 作函数$y=xe^{-x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$的图形。

解 先求出函数的稳定点和拐点：

由$y'=(1-x)e^{-x}=0$，求得$x=1$是稳定点，此时

$$y=\frac{1}{e}.$$

由 $y''=(x-2)e^{-x}=0$，求得 $x=2$，$y=\frac{2}{e^2}$ 是拐点，又因为 $y(0)=0$，所以图象通过原点。

根据上面所求，可以考虑区间：$(-\infty, 1)$，$(1, 2)$ $(2, +\infty)$，列表如下：

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$+$	
y''		$-$		$-$	0	$+$	
凸性		上凸		上凸		下凸	
y		↗	极大值 $=\frac{1}{e}$	↘	拐点 $\left(2, \frac{2}{e^2}\right)$	↘	

求渐近线：

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$，所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线。

描点作图：

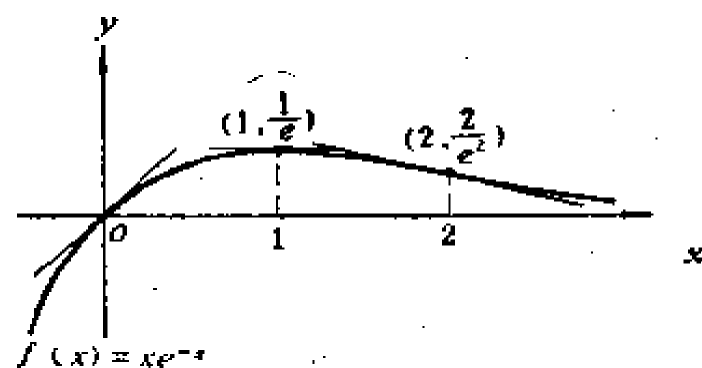


图 17

例3 作函数 $y=f(x)=\sin x+\sin 2x$ 的图象。

解 (1) 函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续；

（2）因为$f(-x)=-f(x)$，所以f为奇函数，又以2π为周期，所以只讨论$[0,\pi]$上的图象即可。

（3）$y'=4\cos x^2+\cos x-2$，

令$y'=0$，求出$x_1\approx 0.94=54°$，

$x_2\approx 2.57=147°$，

$y'=-\sin x(1+8\cos x)$，

因为 $y''(0.94)<0$， $y''(2.57)>0$，

所以 $x_1=0.94$为极大点，$f(0.94)\approx 1.76$为极大值，

$x_2=2.57$为极小点，$f(2.57)\approx -0.37$为极小值。

令$y''=0$，求得$x_3=0$，$x_4\approx 1.7(=97°)$，$x_5=\pi$。

当$x\in[0, 1.7]$时，$y''<0$，曲线上凸。

$x\in[1.7, \pi]$时，$y''>0$，曲线下凸。

所以（1.7，0.968）为拐点，由奇函数性质知道（-1.7，-0.968）也是拐点，同样可以证明（π，0）和（$-\pi$，0）是拐点。

令$y=0$，得$x=0$，$x=\frac{2}{3}\pi$，这是曲线与x轴交点的横坐标。

（4）根据上面讨论可列表如下：

x	0		0.94		1.7		2.57		π
y'		+	0	−		−	0	+	
y''		−	−	−	0	+		+	
凸性		上凸		上凸		下凸		下凸	
y		↗	极大值 1.76	↘	拐点 (1.7, 0.968)	↘	极小值 −0.37	↘	拐点 (π, 0)

（5）描图

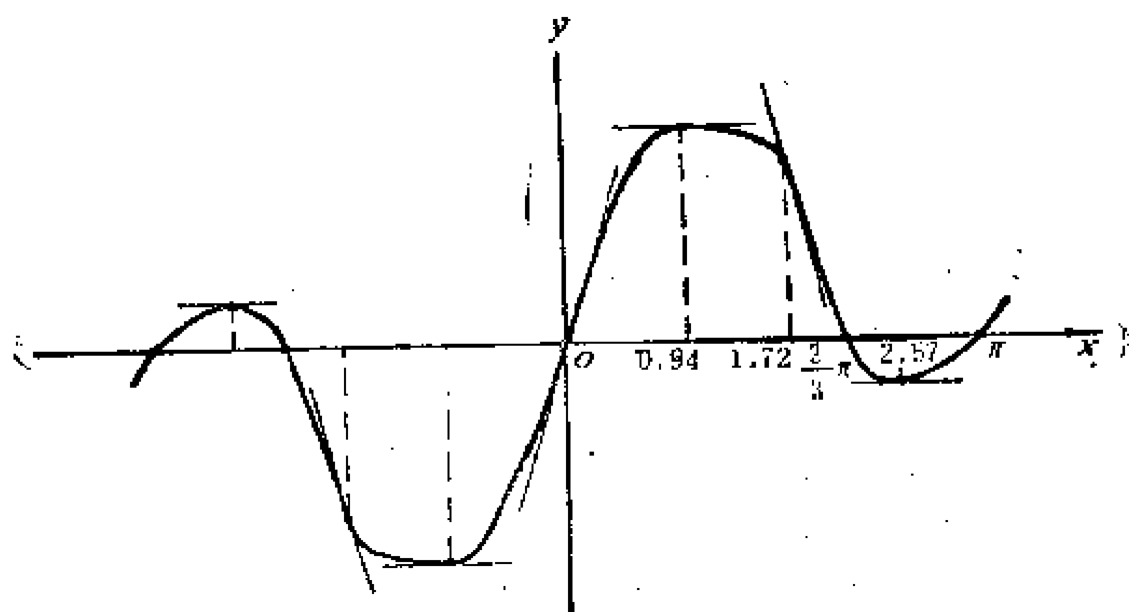


图 18

例4 作函数$y=xe^{-\frac{x}{a}}$，$(a\neq 0)$的图形。

解 （1）函数无奇偶性和周期性，

（2）$y(0)=0$， 所以图形过原点，

（3）$y'=\frac{1}{a}e^{-\frac{a}{x}}(a-x)$，令$y'=0$，得$x=a$为稳定点，显然在$x=a$的两旁$y'$的符号相反，至于一旁的正负，则与$a$的符号有关：

1° 若$a>0$：

当$x<a$时，$y'>0$，函数上升，

当$x>a$时，$y'<0$，函数下降。

此时$x=a$为极大点，函数的极大值为$f(a)=\frac{a}{e}$。

2° 若 $a<0$，

当 $x<a$ 时，$y'<0$，函数下降；

当 $x>a$ 时，$y'>0$，函数上升。

此时 $x=a$ 为极小值，函数的极小值为 $f(a)=\dfrac{a}{e}$。

（4）$y''=e^{-\frac{x}{a}}\left(\dfrac{x-2a}{a^2}\right)$

令 $y''=0$，得 $x=2a$，在 $x=2a$ 的两旁，y'' 的符号一定相反，但是在一旁的正负，又要看 a 的正负。

1° 若 $a>0$，

当 $x<2a$ 时，$y''<0$，图形上凸；

当 $x>2a$ 时，$y''>0$，图形下凸。

2° 若 $a<0$，

当 $x<2a$ 时，$y''<0$，图形上凸；

当 $x>2a$ 时，$y''>0$，图形下凸。

而 $f(2a)=\dfrac{2a}{e^2}$，

$\therefore$ $\left(2a,\dfrac{2a}{e^2}\right)$ 为拐点。

（5）当 $x\to\infty$ 时，论讨 y 的情况：

1° 当 $a>0$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\frac{x}{a}}=0.$$

$\therefore$ $y=0$ 为水平渐近线，

而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{xe^{-\frac{x}{a}}}{x}=+\infty$，

所以图象没有斜渐近线。

2° 当 $a<0$ 时，

若 $x\to-\infty$，则 $y\to0$。

$\therefore$ $y=0$ 也是水平渐近线。

（6）列表绘图：

当 $a>0$ 时，

x	$-\infty$		a		$2a$		$+\infty$
y'		+	0	−		−	
y''		−		−	0	+	
凸性		上凸		上凸		下凸	
y		↗	极大值 $\frac{a}{e}$	↘	拐点 $\left(2a, \frac{2a}{e^2}\right)$	↘	

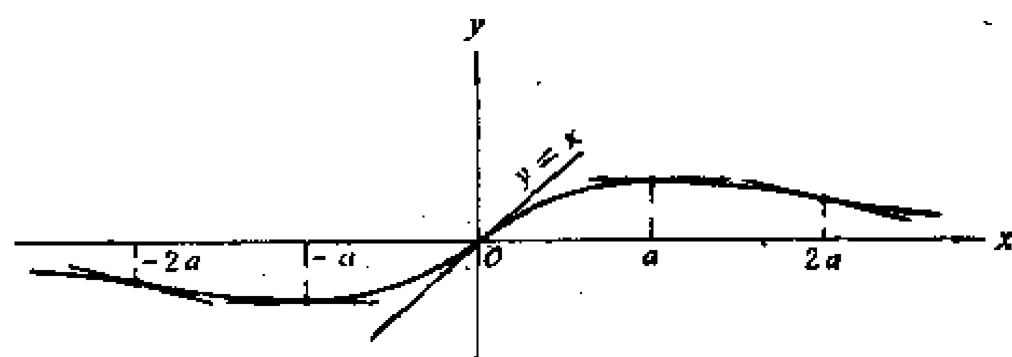


图 19

当 $a<0$ 时，同样列表绘图。

注i)：对于符号相反，绝对值相同的两个 a，函数的图象关于原点对称，但是应该注意区别于奇函数。

注 ii）对于含有参数的函数，读者一般不熟悉，应通过例题使读者会分别情况进行讨论，

§8 函数的极值和最大（小）值

求函数的极值是导数的重要应用。导数概念来源于几何问题和物理问题，对于导数作了很多理论探讨之后，再反回来用它解决实际问题。但是这方面问题很广泛，习作课只举几个典型例题，提高学生分析问题和解决问题的能力，让我们首先考虑求 f 在闭区间〔a, b〕上的最大值或最小值的问题。

如果 f 在〔a, b〕上连续，则 f 必存在最大值和最小值，为了找出最大（小）值，必须考虑三种点：

（1）在〔a, b〕内 f 的稳定点；

（2）端点 a 和 b；

（3）在〔a, b〕内使 f 不可微的点。

如果第一种和第三种点是有限个时，则问题就解决了，如果我们考虑的问题不连续，或要在一开区间上或整条直线上找最大值和最小值，那么我们甚至无法预先肯定最大值和最小值的存在，因而，就要动脑筋去揭示出问题的实质，下面分别举例说明上面提到的方法：

例1 由一点（$0,h$）引一直线至水平轴，然后折至一点（$1,h$），（如图20所示），证明：当角 α 与 β 相等时折线总长最短。

证 设点（0, h）在 y 轴上，而水平轴就是 x 轴。

折线与 x 轴接触在 $P(x,0)$ 点。问题是要证明折线 $PA+$

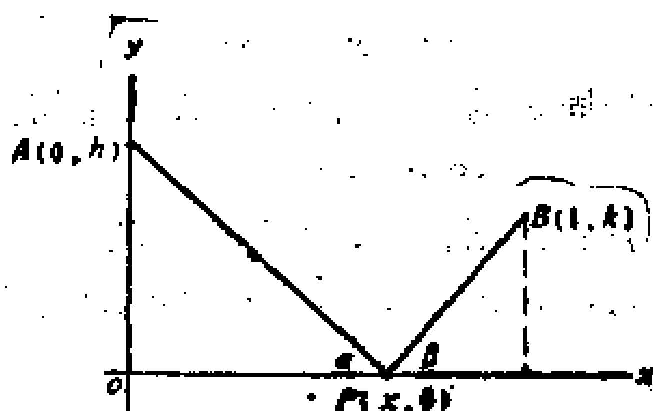


图 20

$+PB$ 最短时 $\alpha=\beta$。这里必须用 P 点的坐标，然而又不是我们追究的目的，从几何直观，显然，距离 $PA+PB$ 是 x 的函数，用 $f(x)$ 表示它，且根据距离公式，知道

$$f(x)=\sqrt{x^2+h^2}+\sqrt{(x-1)^2+k^2}$$

正函数 f 显然有最小，因 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，并且 f 处处可微，故最小出现在使 $f'(x)=0$ 的点上。现在

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}-\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+k^2}}\right)$$

$$f'(0)=\frac{-1}{2\sqrt{1+k^2}}<0<\frac{1}{2\sqrt{1+h^2}}=f'(1),$$

所以 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有根。

$$f''(x)=\frac{h^2}{2(x^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{k^2}{2[(1-x)^2+k^2]^{\frac{3}{2}}}>0,$$

$f'(x)$ 单调上升，$f'(x)=0$ 只能有一根，这唯一的根（即是 P 点的横坐标）满足

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}=\frac{1-x}{\sqrt{(1-x)^2+h^2}}$$

(这里的 x 已经是固定的数)，而这等式从几何上看，恰好是

$$\cos\alpha=\cos\beta$$

直观上说明 α，β 都是正锐角，所以 $\alpha=\beta$。

例2 求数列 $\sqrt[n]{n}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ 的最大项。

解：设 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，$(x>0)$，

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)。$$

由 $f'(x)=0$，得 $x=e$，

则当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$，f 上升，

当 $e<x<+\infty$ 时，$f'(x)<0$，f 下降。

$\therefore$ $x=e$ 时，$f(x)$ 取得极大值。

因为 e 不是自然数，而其邻近的两自然数为2，3。所以

$2<e<3$，所以 $f(2)=\sqrt{2}$，$f(3)=\sqrt[3]{3}$。

比较，$\sqrt{2}$ 与 $\sqrt[3]{3}$，有 $\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$。

$\therefore$ $\sqrt[n]{n}$ 的最大项为 $\sqrt[3]{3}$。

例3 设 $f(x)$ 在 $[a, \infty)$ 上有二阶导数，且有

（1）$f(a)>0$；

（2）$f'(a)<0$；

（3）$f''(x)\leqslant 0$，对于任意 x 大于 a。

证明：方程 $f(x)=0$ 在 $(a, +\infty)$ 内存在唯一的根。

证 将 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 用泰勒公式展开

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi(x))}{2!}(x-a)^2,$$

$\because\ f''(x)\leqslant 0,\ (x>a),\ \therefore\ \dfrac{f''(\xi)}{2!}\leqslant 0,$

又 $f'(a)<0$，$\therefore$ 当 $x\to+\infty$ 时，

$$f(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)^2+f'(a)(x-a)+f(a)\to-\infty,$$

$\therefore\ \exists\, x_1>a,\ f(x_1)<0,$

又因为 $f(a)>0$，由 f 在 $[a,\ x_1]$ 上连续。

根据连续函数介值定理，$\exists\, x_0\in(a,x_1)$ 使 $f(x_0)=0$，这就证明了方程的根的存在性。

下面证明根的唯一性。

已知 $f''(x)\leqslant 0$，

$\therefore\ f'(x)$ 不增

又因为 $f'(a)<0$，

$\therefore\ \forall x>a,\ f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(a,\ +\infty)$ 上严格下降，所以 $f(x)=0$ 在 $(a,\ +\infty)$ 仅有一个根。

例 4 若 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 连续，在 $(a,\ b)$ 可微，并且在 $(a,\ b)$ 上有且只有一个极值（极大或极小），证明此点即为 $f(x)$ 在 $[a,\ b]$ 上的最大或最小点。

证 采用反证法：

不妨设 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 的唯一极大点，而 $f(x)$ 的最大点是 $[a,\ b]$ 上的 $x_0'\neq x_0$。

i）若 x_0' 不是端点（即 $x_0'\neq a$ 且 $x_0'\neq b$）根据最大点的定义，x_0' 必为 f 的极大点，与 f 在 $(a,\ b)$ 只有一个极大点矛盾。

ii）若 $x_0'=a$（或 $=b$），则对于一切 $x\in(a,\ b)$ 有 $f(x)<f(a)$，所以 $f(x_0)<f(a)$，因为 x_0 为极大点，则有 x_0''.

$f(x_0'')<f(x_0)<f(a)$

∴ 在(a, x_0'')上有ξ，使$f(\xi)=f(x_0)$，根据罗尔定理在(ξ, x_0)间有一点ξ'为极小值，由此又引出矛盾。从 i) ii) 两步证明，知道最大点x_0'不能不是极大点x_0。

注：由下图可知存在的x_0''可取在(a, x_0)中。



图 21

第七章　不定积分

基本要求：

学生学习了基本积分法，在作了一定数量习题的基础上，可以通过习作课对学生作一些计算方法和技巧上的训练，由于积分法比较灵活，当然不能要求学生拿到一个题目就能随心应手的解决，但总能找到一些可以依循的规律，这就要总结学过的方法和可积分的函数类型。

一、积分的基本方法。

（1）分部积分法；

（2）换元法。

二、常见的可积分的函数。

（1）简单积分表中的一些函数；

（2）有理函数；

（3）可用分部积分法解决的某些函数；

（4）三角函数；

（5）其它可积分函数。

要求学生求积分时，先观察被积分式属于哪种可积分的类型，作到心中有数。着手积分时也不能硬套哪种方法，要针对具体问题研究采取较好的方法，如果被积式难于判断它属于哪一种可积分类型，就要自己想办法，例如试试看经过变量替换或分部积分法之后能否将所求积分归于某一可积分类型。

例1　下列各题都可以用分部积分法求解，由此可以总结出哪些函数可以用分部积分法。

（1）$\int x^2e^x dx$；

（2）$\int e^{ax}\sin bx dx$；

（3）$\int x^2\sin x dx$；

（4）$\int \ln^3 x dx$；

（5）$\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx$；

（6）$\int \sec^3 x dx$；

（7）$\int \cos(\ln x)dx$；

（8）$\int \sqrt{x}\ln x dx$；

（9）$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$

（10）$\int xe^x\sin x dx$；

（1）－(10)依次得到以下答案：

（1）$x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$；

（2）$\frac{a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+C$；

（3）$-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$；

（4）$x(\ln x)^3-3x(\ln x)^2+6x\ln x-6x+C$；

（5）$\ln x\cdot\ln(\ln x)-\ln x+C$；

（6）$\frac{1}{2}[\mathrm{tg}x\sec x+\ln(\sec x+\mathrm{tg}x)]+C$，

（7）$\frac{1}{2}[x\cos(\ln x)+x\sin(\ln x)]+C$；

(8) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln x-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C$；

(9) $-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$；

(10) $\frac{e^x}{2}[x(\sin x-\cos x)+\cos x]+C$。

(1)—(5)在计算上没有什么困难，第(6)题只要记得公式$\int\sec x dx=\ln(\sec x+\operatorname{tg}x)+C$，就能顺利地解答。

下面详细解第(9)题和第(10)题。

(9) **解** $\int\frac{x^2dx}{(1+x^2)^2}=\frac{1}{2}\int x\frac{2x}{(1+x^2)^2}dx$

$$=-\frac{1}{2}\int xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}-\int\frac{dx}{1+x^2}\right\}$$

$$=-\frac{x}{2(1+x^2)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C.$$

(10) **解** $I=\int xe^x\sin xdx=\int x(e^x\sin x\,dx)$

设 $du=e^x\sin xdx$，

于是 $u=\int e^x\sin xdx==\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}$。

因而

$$I=\int xdu$$

$$=\frac{1}{2}\left\{xe^x(\sin x-\cos x)-\int e^x(\sin x-\cos x)dx\right\}$$

$$=\frac{e^x}{2}\ [x(\sin x-\cos x)+\cos x]\ +C.$$

例 2 用换元法求下列不定积分：

对于下面几个例题很容易看出换元的方法。

(1) $I=\int e^x\sin e^x dx$; 设 $u=e^x$，容易得到

$$I=-\cos e^x+C.$$

(2) $I=\int e^{e^x}e^x dx$; 设 $u=e^x$，得到 $I=e^{e^x}+C.$

(3) $I=\int \ln(\cos x)\operatorname{tg}x dx$; 设$u=\ln(\cos x)$，得到

$$I=\frac{-\ln^2(\cos x)}{2}+C.$$

(4) $I=\int\frac{\ln(\ln x)}{x\ln x}dx$; 设 $u=\ln(\ln x)$，得到

$$I=\frac{1}{2}\ln^2(\ln x)+C.$$

(5) $I=\int x\sqrt{1-x^2}dx$。设$u=1-x^2$，得到

$$I=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C.$$

上面几个题都是经过变换将被积函数变为简单积分表中的可积分函数。

例 3 下例积分可用变换$x=\sin u$或$x=\cos u$等作出，在这里三角函数的恒等式及三角函数的导数都应运用自如。

（1）$I=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$，设 $x=\mathrm{tg}u$，则

$$I=\ln|x+\sqrt{1+x^2}|+C.$$

（2）$I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$，设 $x=\sec u$，则

$$I=\mathrm{arcsec}x+C.$$

（3）$I=\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$，设 $x=\sin u$，则

$$I=-\ln(\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x})+C.$$

例 4 下列积分可用各种类型的变换，并且换元法和分部积分法同时在一个题目中使用。

（1）$I=\int x^5 e^{x^3}dx$，设 $x^3=t$，则

$$I=\frac{1}{3}e^{x^3}(x^3-1)+C.$$

（2）$I=\int\frac{\arcsin x}{x^2}dx$，先用分部积分法得到

$$I=-\frac{1}{x}\arcsin x+\int\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}.$$ 然后再用例 3

第（3）题的结果，或作变换 $u=\sqrt{1-x^2}$，最后得到

$$I=-\frac{1}{x}\arcsin x-\ln\left|\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right|+C.$$

(3) $I=\int\frac{\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}dx$,

令 $du=\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$, 则 $u=\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}$,

再设 $x=\sin t$, 得到 $u=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$。

故 $I=\int\arcsin x\,d\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+$

$+\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$。或者设$\arcsin x=u$也可以求得。

(4) $I=\int x\,\mathrm{arc\,tg}\,x\ln(1+x^2)dx$,

解 设$dv=x\ln(1+x^2)dx$,

则 $v=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$。

$\therefore\quad I=\frac{1+x^2}{2}[\ln(1+x^2)-1]\,\mathrm{arctg}x-$

$\frac{1}{2}\int[\ln(1++x^2)-1]dx$。

$=\frac{1+x^2}{2}[\ln(1+x^2)-1]\mathrm{arctg}x-$

$\frac{1}{2}x\ln(1+x^2)+\frac{3}{2}x-\mathrm{arctg}x+C$。

(5) $I=\int\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$。

解 设 $t=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, 则 $x=\frac{t^2+1}{1-t^2}$, $dx=\frac{4tdt}{(1-t^2)^2}$。

$$\therefore \quad I=\int\frac{4tdt}{(1+t)^3(1-t)}=\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|+$$

$$\frac{1}{2}(x^2-x\sqrt{x^2+1})+C.$$

或 $$I=\int\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})}dx$$

$$=\int(x-\sqrt{x^2-1})dx$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|]+C.$$

例 5 有理函数的积分法，可以分为以下几种解法：

i）被积函数为假分式时，先化为整式与真分式之和，再积分。

例 求积分 $I=\int\frac{x^4dx}{x^2+1}$.

先将被积函数表示为：

$$\frac{x^4}{x^2+1}=\frac{x^4-1+1}{x^2+1}=x^2-1+\frac{1}{x^2+1}$$

于是 $$I=\int(x^2-1)dx+\int\frac{dx}{x^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}x^3-x+\mathrm{arc\,tg}\,x++C.$$

ii）降幂法：

例 求积分 $I=\int\frac{xdx}{x^4+3x^2+1}$.

由于 $I=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^4+3x^2+1}$

设 $u=x^2$。

于是

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+3u+1}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x^2+3-\sqrt{5}}{2x^2+3+\sqrt{5}}\right|+C.$$

iii) 部分分式法（待定系数法）：

例 求 $I=\int\frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}dx$.

由于 $I=\int\frac{x^6+x^4-4x^2-2}{x^4(x^2+1)^2}xdx$

设 $u=x^2$

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{u^3+u^2-4u-2}{u^2(u+1)^2}du$$

$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{u+1}-\frac{4}{u^2(u+1)}+\frac{2}{u^2(u+1)^2}\right]du$$

其中 $\frac{1}{u^2(u+1)}=-\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u+1}$.

$$\frac{1}{u^2(u+1)^2}=-\frac{2}{u}+\frac{2}{u+1}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{(u+1)^2}.$$

积分后， $I=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{x^2}+C$。

iv）分项积分法：

例 求积分 $I=\int\frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$。

因为 $\frac{1}{x^2(1+x^2)^2}=\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)^2}$

$=\frac{1}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{1+x^2-x^2}{x^2(1+x^2)}-\frac{1}{(1+x^2)^2}$

$=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{(1+x^2)^2}$。

积分求得： $I=-\frac{1}{x}-\frac{3}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2(1+x^2)}+C$。

v）换元法：

例 求积分 $I=\int\frac{x+2}{(3x^2+2x+1)^2}dx$。

积分可表示为下式：

$$I=\frac{1}{6}\int\frac{d(3x^2+2x+1)}{(3x^2+2x+1)^2}+\frac{5}{3}\int\frac{dx}{(3x^2+2x+1)^2}$$

上面第一个积分可作变换 $u=3x^2+2x+1$ 后求得积分：

$$I=-\frac{5x+1}{4(3x^2+2x+1)}+\frac{5}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3x+1}{\sqrt{2}}+C$$

例 6 求无理函数的积分有以下几种方法：

i ）先将无理函数的分子或分母有理化，再求积分。

例如求积分 $I=\int\frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}dx$。

先将被积函数的分子有理化，

$$\frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}=\frac{2x^2+3}{x\sqrt{2x^2+3}}=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+3}}+\frac{3}{x\sqrt{2x^2+3}},$$

$$\therefore\quad I=\int\frac{2xdx}{\sqrt{2x^2+3}}+\int\frac{3dx}{x\sqrt{2x^2+3}}$$

$$=\sqrt{2x^2+3}-\sqrt{3}\ln\left|\frac{\sqrt{2x^2+3}+\sqrt{3}}{x}\right|+C.$$

ii ）降幂法：

例如求积分 $I=\int\frac{dx}{x\sqrt{x^4+x^2}}$

将积分表示为下式：

$$I=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2)}{x^2\sqrt{x^4+x^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u\sqrt{u^2+u}}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2\sqrt{1+\frac{1}{u}}}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{u}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{dv}{\sqrt{1+v}}=-(1+v)^{\frac{1}{2}}+C.$$

（其中$u=x^2$，$v=\frac{1}{u}$）。

$$\therefore\quad I=-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}+C$$

iii）分项积分法：

例　求积分 $I=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+1}}$。

将积分表示为下式：

$$I=\int\frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}}dx=\int\sqrt{x^2+1}\,dx-\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}-\ln|x+\sqrt{1+x^2}|\right]+C.$$

iv）分部积分法：

例　求积分 $I=\int\sqrt{x+x^2}\,dx$。

用分部积分法：

$$I=x\sqrt{x+x^2}-\int\frac{(1+2x)xdx}{2\sqrt{x+x^2}}$$

$$=x\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x}}-\int\sqrt{x+x^2}dx.$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}x\sqrt{x+x^2}+\frac{1}{4}\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{x+x^2}\quad(2x+1)-\frac{1}{8}\ln|x+\frac{1}{2}+$$

$$+\sqrt{x^2+x}|+C.$$

v）换元法：这个方法是最常用的方法，被积函数经变换后，将无理函数有理化再积分。

例　求积分 $I=\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$。

解 设$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$，所以$x=(t^3-1)^4$，

$$dx=12t^2(t^3-1)^3dt.$$

故 $$I=12\int t^3(t^3-1)\,dt$$

$$=\frac{12}{7}(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{7}{3}}-3(1+\sqrt[4]{x})^{\frac{4}{3}}+C.$$

vi) 其它方法：

例 求积分 $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$.

解 $$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$$

$$=2\int\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}d(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$$

$$=2\ln|\sqrt{x}+\sqrt{x+1}|+C.$$

例 7 三角函数积分法：$I=\int R(\sin x,\cos x)dx$.

i) 万能变换：设 $x=\mathrm{tg}\frac{t}{2}$，总能将函数 $R(\sin x,\cos x)$ 化为有理函数.

ii) 一般变量替换.

例 求不定积分 $I=\int\frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}dx$.

解 $$I=-\int\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}d\cos x=-\int\frac{(1-\cos^2 x)^2}{\cos^4 x}d\cos x.$$

设$u=\cos x$.

于是 $I=-\int\frac{(1-u^2)^2}{u^4}du=-\frac{1}{3}\frac{1}{\cos^3x}+\frac{2}{\cos x}$

$-\cos x+C$。

例 求积分：$I=\int\frac{dx}{a+b\operatorname{tg}x}$（$a,b$为不同时为0的常数）。

解 设$t=\operatorname{tg}x$。

则 $I=\int\frac{dt}{(a+bt)(1+t^2)}$，已经化为有理函数积分。

例8 下面作法是否正确？

$$\int|x|e^xdx=\int xe^x\operatorname{sgn}x\,dx=\operatorname{sgn}x\int xe^xdx$$
$$=\operatorname{sgn}x(xe^x-e^x)+C。$$

上述作法是不正确的，这是因为$\operatorname{sgn}x$不是常函数，且$\operatorname{sgn}x$在$x=0$点间断。

正确作法为：

$$\int|x|e^xdx=\begin{cases}\int xe^xdx=xe^x-e^x+C_1, & x\geqslant 0,\\ \int -xe^xdx=-xe^x+e^x+C_2, & x<0.\end{cases}$$

设 $F(x)=\begin{cases}xe^x-e^x+C_1, & x\geqslant 0;\\ -xe^x+e^x+C_2, & x<0.\end{cases}$

显然函数$F(x)$在$x=0$连续。

因而 $\lim\limits_{x\to 0+}F(x)=C_1-1$，

$\lim\limits_{x\to 0-}F(x)=C_2+1$，

则应：$C_1-1=C_2+1$，$\therefore\quad C_1=C_2+2$。

$$\therefore \quad \int |x| e^x dx = F(x) = \begin{cases} xe^x - e^x + C, & x \geqslant 0, \\ -xe^x + e^x + C - 2, & x < 0. \end{cases}$$

还可以证明$F(x)$在$x=0$点的导数为0。

例9 下面的作法同样是错误的。

$$\int \operatorname{sgn} x dx = \operatorname{sgn} x (x + C) = |x| + C.$$

可以证明$\operatorname{sgn} x$，$x \in [-1, 1]$不存在原函数$F(x)$。

证 若存在$F(x)$使$F'(x) = \operatorname{sgn} x$，$x \in [-1, 1]$，则由微分中值定理：

$$F'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} F'(\xi_1) =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} \xi_1 = 1.$$

$$(0 < \xi_1 < x).$$

$$F'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} F'(\xi_2) = -1.$$

$$(x < \xi_2 < 0).$$

说明$F(x)$在$x=0$不可导，与$F'(x) = \operatorname{sgn} x$，$x \in [-1, 1]$矛盾，所以$\operatorname{sgn} x$，$x \in [-1, 1]$不存在原函数。

第八章　定积分

§1　定积分定义

通过习作课的练习和讲解，要求学生深入理解定积分的概念．

1．叙述函数$y=f(x)$在$[a,\ b]$上的定积分定义：

定义　设函数$y=f(x)$定义在$[a,\ b]$上$(a<b)$，如果存在常数I，对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，对于区间$[a,\ b]$的任意分法Δ及任意取法$\xi_i\in\Delta_i$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，只要$\lambda(\Delta)<\delta$(其中$\lambda(\Delta)$是分法Δ之下的最大子区间长)，就有$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon$，则称函数$y=f(x)$在$[a,b]$上黎曼可积，记作$f(x)\in R[a,\ b]$，$I$称为$f$在$[a,\ b]$上的定积分，记作，$I=\int_a^b f(x)dx$，有时也记作

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

对于上述定义，要使学生理解以下几点：

（1）定义中应强调对于区间$[a,\ b]$的分法Δ与各点ξ_i取法的任意性，即δ仅与ε有关而与分法、取法无关，也就是说，对于给定的$\varepsilon>0$，存在的$\delta(\varepsilon)>0$，对于一切分法及任意取法都是一致可用的．

（2）黎曼和的极限与区间$[a, b]$的分法及各点ξ_i ($\xi_i \in \Delta x_i$、$i=1, 2, \cdots\cdots, n$)的取法无关。

（3）定义中$\lambda(\Delta)\to 0$（即在分法Δ之下的最大子区间长趋于零）表示对于区间$[a, b]$的无限细分的过程，$\lambda(\Delta)\to 0$则一定有$n\to\infty$，但仅有$n\to\infty$不能保证$\lambda(\Delta)\to 0$，（这是为什么？请举例说明），因此，不能将定积分写作

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

（4）定义中定积分可以看作黎曼和的极限，但不同于过去讲的函数极限，这是因为对于相同的$\lambda(\Delta)$不一定对应唯一的黎曼和，亦即黎曼和不是变量$\lambda(\Delta)$的函数，因此严格地讲不应用$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$来定义积分，而应该用$\varepsilon-\delta$语言来定义定积分，尽管如此，函数极限的某些基本性质对于此种"极限"仍然成立。

2．在用定积分定义求函数的积分时，一般取特殊分法和取法，但应该强调这样求定积分的方法一定要在黎曼可积的前提下才能实行，否则会得到错误的结果。

例1 函数$f(x)=\begin{cases} a, & x\text{为有理数} \\ b, & x\text{为无理数} \end{cases}$ $x\in[a, b]$，$(a<b)$将区间$[a, b]$ n等分，每个小区间长为$\dfrac{b-a}{n}$，第i个小区间

$$\Delta_i=\left[a+\frac{(i-1)(b-a)}{n},\ a+\frac{i(b-a)}{n}\right].$$

取 $\xi_i\in\Delta x_i$，ξ_i为有理数，$i=1, 2, \cdots, n$，则黎曼和

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot a=a(b-a).$$

当$n\to\infty$时，黎曼和的极限为$a(b-a)$，如果将区间$[a,b]$ n等分后，在每个小区间Δ_i中取$\xi_i\in\Delta_i$，ξ_i为无理数，$i=1, 2, \cdots, n$。容易求得当$n\to\infty$时黎曼和的极限为$b(b-a)$。

显然$a(b-a)\neq b(b-a)$，

故f在$[a, b]$不可积。

由上可见，如要证明定积分不存在，只要取两种不同的分法或取法，求得黎曼和的极限如果不同，那么就可以肯定不可积了。

我们姑且或暂时承认以下几种函数可积：

1）$f(x)$在任何有限区间连续；

2）$f(x)$是在任何有限区间上具有有限多个间断点的有界函数；

3）$f(x)$是在任何有限区间上的单调有界函数。

例2 设 $f\in R[a, b]$，证明

（1）$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left[a+\frac{i(b-a)}{n}\right];$$

（2）$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+2f\left(a+\frac{2}{n}(b-a)\right)+\cdots+2f\left(a+\frac{n-1}{n}(b-a)\right)+f(b)\right].$$

证 （1）证明从略。

（2）因为$f\in R[a, b]$ 所以可取特殊分法和取

法，将$[a, b]$ n等分，分点为：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，

$\left(x_i=a+\frac{i}{n}(b-a),\ i=1, 2, \cdots, n,\right)$，再在$[x_{i-1}, x_i]$内

插入它的中点$\overline{x}_i=\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$，则共有$2n$个小区间，区间长

为$\Delta=\frac{b-a}{2n}$，在每个小区间上取点方法如下：

在$[x_0, \overline{x}_1]$取左端点，在$[\overline{x}_1, x_1]$取右端点，
在$[x_1, \overline{x}_2]$取左端点，在$[\overline{x}_2, x_2]$取右端点，

……………………………………………………

在$[x_{i-1}, \overline{x}_i]$取左端点，在$[\overline{x}_i, x_i]$取右端点，以此类推，则有黎曼和

$$f(a)\frac{b-a}{2n}+2f(x_1)\frac{b-a}{2n}+\cdots+2f(x_{n-1})\frac{b-a}{2n}+$$

$$+f(b)\frac{b-a}{2n}=\frac{b-a}{2n}\left[f(a)+2f\left(a+\frac{b-a}{n}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+2f\left(a+\frac{n-1}{n}(b-a)\right)+f(b)\right]。$$

例3　计算　$\int_a^b\frac{1}{x^2}dx$，$(0<a<b)$。

解法1　由于$y=\frac{1}{x^2}$在$[a, b]$上连续，故可积，将$[a,b]$任意分成n个子区间，分点为：$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，取$\xi_i=\sqrt{x_i x_{i-1}}$，则

$$\int_a^b \frac{1}{x^2}dx=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\xi_i^2}\Delta x_i,\quad (x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant x_i)$$

$$=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i x_{i-1}}(x_i-x_{i-1})$$

$$=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_{i-1}}-\frac{1}{x_i}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

解法 2 取分法 $\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，其中 $x_i=ar^i$，$i=1,2,\cdots,n$，$r=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}>1.$，取 $\xi_i=x_{i-1}$，$i=1,2,\cdots,n$。则

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(ar^{i-1})^2}(ar^i-ar^{i-1})$$

$$=\frac{1}{a^2}(ar-a)+\frac{1}{(ar)^2}(ar^2-ar)+$$

$$+\frac{1}{(ar^2)^2}(ar^3-ar^2)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{(ar^{n-1})^2}\left(\frac{1}{ar^{n-2}}-\frac{1}{ar^{n-1}}\right)=\frac{r}{a}-\frac{1}{ar^{n-1}}$$

$$=r\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{ar^n}\right)$$

$$=\sqrt[n]{\frac{b}{a}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

当 $n\to\infty$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$

上面三个例题是在肯定函数在所给区间可积后，再取特

殊分法和取法求黎曼和的极限，这有一定的技巧性。

例4 用定积分定义证明函数 $f(x)=x$ 在 $[0,1]$ 上可积，并求 $\int_0^1 xdx$。

证 在 $[0,1]$ 上任作一分法 $\Delta=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1\}$。任取 $\xi_i\in\Delta x_i$, $(i=1,2,\cdots,n)$，在 Δx_i 上取中点 $\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$，则 $\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\leqslant\xi_i\leqslant x_i$ 或 $x_{i-1}\leqslant\xi_i\leqslant\frac{x_i+x_{i-1}}{2}$。

于是
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}x_i\Delta x_i \tag{1}$$

或
$$\sum_{i=1}^{n}x_{i-1}\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\xi_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i \tag{2}$$

但是
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(x_i^2-x_{i-1}^2)=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\ \lim_{\lambda(\Delta)\to0}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i=\frac{1}{2}.$$

再考察
$$\left|\sum_{i=1}^{n}x_i\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i\right|$$
$$=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\Delta x_i\right|$$
$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{x_i-x_{i-1}}{2}\right|\Delta x_i\right|\leqslant\frac{1}{2}\lambda(\Delta)\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{1}{2}\lambda(\Delta)$$

$\forall \varepsilon>0$，取 $\delta(\varepsilon)=2\varepsilon$，只要 $\lambda(\Delta)<\delta(\varepsilon)$，对任意分法 Δ，任意取法 ξ，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i\right|\leqslant\frac{1}{2}\lambda(\Delta)<\frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon=\varepsilon.$$

$\therefore$ 有 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i\right)=0.$

已经知道 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i+x_{i-1}}{2}\Delta x_i=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore$ $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i=\dfrac{1}{2}.$

$\therefore$ (1)式左、右两边都趋于$\dfrac{1}{2}$.

$\therefore$ $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i \Delta x_i=\dfrac{1}{2}.$

在(2)式情形可同样证明。

$\therefore$ $\int_a^b x dx=\dfrac{1}{2}.$

*例5 用基本分法序列定义定积分，证明此定义与本节定积分的定义等价。

证 先定义“基本分法序列”

$[a,b]$ 的分法$\{a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b\}$记作 Δ_n.

这里有两点要说明：①取定 n 后，分点就确定了，即每次所取分点 $x_i^{(n)}$ 均为 n 的函数，②取定 n 后，分点不一定是 $n+1$ 个，即不一定将 $[a,b]$ 分为 n 个小区间。

相应地记小区间为 $\Delta_i^{(n)}=\left[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}\right]$，长为

$$\Delta x_i^{(n)} = x_i^{(n)} - x_{i-1}^{(n)}, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

$\lambda_n(\Delta_n) = \max\limits_{1\leq i\leq m_n}\left\{\Delta x_i^{(n)}\right\}$，这种 Δ_n 所成的序列 $\{\Delta_n\}$ 称为区间$[a,b]$的分法序列。

若分法序列具有性质：$\lambda_n \to 0$ $(n\to\infty)$，则称为"基本分法序列"。

定积分的另一定义，定义 2：设 f 定义在 $[a,b]$ 上，若对于任意一个基本分法序列 $\{\Delta_n\}$，无论 $\xi_i^{(n)}\in\Delta_i^{(n)}$，$i=1,2,\cdots,m_n$ 如何选取，总有

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^{(n)})\,\Delta x_i^{(n)} = I$ 存在，则称 I 为 f 在 $[a,b]$ 上的定积分，记作 $I=\int_a^b f(x)dx$。

即 $\forall \varepsilon>0, \exists N(\varepsilon)>0$，对一切分法 Δ_n 与取法 $\xi_i^{(n)}$，只要 $n>N$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)} - I\right| < \varepsilon$$

则称 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分。

下面证明定义 2 与定义 1 等价。

(i) 定义 1 ⇒ 定义 2．

由定义 1：$\forall \varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，对于任意分法$\Delta$和任意取法$\xi$，只要 $\lambda(\Delta)<\delta$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i - I\right| < \varepsilon.$$

任取一个基本分法序列$\{\Delta_n\}$，因为$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$。

∴ $\forall\varepsilon'>0$，$\exists N(\varepsilon')>0$，只要$n>N(\varepsilon')$，总有$\lambda_n<\varepsilon'$。取$\varepsilon'=\delta(\varepsilon)$，则有$\lambda_n<\delta(\varepsilon)$。

既然对任意分法Δ与任意取法ξ，只要$\lambda(\Delta)<\delta(\varepsilon)$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

∴ $\lambda_n<\delta(\varepsilon)$时，在分法$\Delta_n$与取法$\xi^{(n)}$之下，

$$\left|\sum_{i=1}^{m_n}f(\xi_i)^{(n)}\Delta x_i^{(n)}-I\right|<\varepsilon$$

即定义2成立。

〈ii〉定义2⇒定义1。

由定义2，对于$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，对于任意分法Δ_n与任意取法$\xi^{(n)}$，只要$n>N$，都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}-I\right|<\varepsilon.$$

用反证法，按定义1，设$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\neq I$。即$\exists\varepsilon_0>1$，$\forall\delta_0>0$，存在分法$\Delta$与取法$\xi$，尽管$\lambda<\delta_0$而还有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

取$\delta_n=\dfrac{1}{n}$，对于每一个n有一个分法Δ_n与取法$\xi^{(n)}$，使当$\lambda_n<\delta_n=\dfrac{1}{n}$时，有

$$\left|\sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}-I\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

$\because$ $\lambda_n<\frac{1}{n}$，当 $n\to\infty$时，即$\{\Delta_n\}$是基本分法序列，也就是存在基本分法序列$\{\Delta_n\}$与取法$\xi^{(n)}$，且存在$\varepsilon_0>0$，使当$\lambda_n<\frac{1}{n}$时有

$$\left|\sum_{i=1}^{m_n} f(\xi_i^{(n)})\ \Delta x_i^{(n)}-I\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

与已知矛盾。

$$\therefore\quad \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\ \Delta x_i=I.$$

为了更深刻理解定积分定义，再举下面例题。

*例6　定义：设 $\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ 是 $[a,b]$ 的一个分法，设 $\Delta x_i=[x_{i-1},x_i]$ $i=1,2,\cdots,n$，函数φ定义在 $[a,b]$ 上，如果存在 $[a,b]$ 的一个分法Δ及有限个实数 C_i $(i=1,2,\cdots,n)$，使得$\varphi(x)=C_i$，$x_i\in\Delta x_i$，$i=1,2,\cdots,n$。则称φ是 $[a,b]$ 上的阶梯函数（亦称初等简单函数），区间 $[a,b]$ 上所有阶梯函数的集合记为 $C_0[a,b]$。

设　$f\in R[a,b]$。

求证：（1）存在一个定义在 $[a,b]$ 上的阶梯函数列 $\{\varphi_n(x)\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx.$$

（2）存在一个定义在 $[a,b]$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx.$$

证 （1）要证明存在 $\{\varphi_n(x)\}$，$\varphi_n(x)\in C_0[a,b]$。$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$n>N$时，有

$$\left|\int_a^b \varphi_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

先作函数列$\{\varphi_n(x)\}$。

作 $[a,b]$ 的一个基本区间分法序列（也可以等分）。

$$\Delta_n=\left\{a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b\right\},\quad n=1,2,\cdots$$

$\lambda_n\to 0\,(n\to\infty)$，记 $\Delta x_i^{(n)}=\left[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}\right]$，

$m_i^{(n)}=\inf\limits_{x\in\Delta x_i^{(n)}}\left\{f(x)\right\}$，$M_i^{(n)}=\sup\limits_{x\in\Delta x_i}\{f(x)\}$，$i=1,2,\cdots,m_n$。

$$\text{作}\quad \varphi_n(x)=\begin{cases} m_i^{(n)}, & x\in\Delta x_i^{(n)},\ i=1,2,\cdots,m_n\\ f(b), & x=b\end{cases}$$

则有 $\varphi_n(x)\in C_0[a,b]$。

$$\underline{S}(\Delta_n)=\sum_{i=1}^{m_n}m_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}=\int_a^b \varphi_n(x)\,dx.$$

记 $\sigma(\Delta_n,\ \xi^{(n)})=\sum\limits_{i=1}^{m_n}f(\xi_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}$，$I=\int_a^b f(x)\,dx$

由于 $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，$n\geqslant N$有

$$\overline{S}(\Delta_n)-\underline{S}(\Delta_n)<\frac{\varepsilon}{2},$$

$$\text{（其中 }\overline{S}(\Delta_n)=\sum_{i=1}^{m_n}M_i^{(n)}\Delta x_i^{(n)}\text{）}$$

且有 $|\sigma(\Delta_n, \xi^{(n)})-I|<\frac{\varepsilon}{2}$.

$$\therefore \quad \left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b \varphi_n(x)dx\right|=|\underline{S}(\Delta_n)-I|$$

$$\leqslant|\underline{S}(\Delta_n)-\sigma|+|\sigma-I|\leqslant|\overline{S}(\Delta_n)-\underline{S}(\Delta_n)|+$$

$$+|\sigma-I|<\varepsilon.$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\varphi_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx$.

（2）作 $[a,b]$ 的一个基本区间分法序列

$\Delta_n=\left\{a=x_0^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b\right\}$, $\Delta x_i^{(n)}=\left[x_{i-1}^{(n)},\ x_i^{(n)}\right]$,

$i=1,2,\cdots,m_n$. 有 $\lambda_n\to 0$，记点

$$P_i^{(n)}\left(x_{i-1}^{(n)},f(x_i^{(n)})\right)\equiv\left(x_{i-1}^{(n)},\ y_{i-1}^{(n)}\right).$$

$$Q_i^{(n)}=\left(x_i^{(n)},\ f(x_i^{(n)})\right)\equiv\left(x_i^{(n)},y_i^{(n)}\right).$$

作直线 $\overline{P_i^{(n)}Q_i^{(n)}}$ 的方程为

$$g_n^{(i)}(x)=\frac{y_i^{(n)}-y_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}(x-x_{i-1}^{(n)})+y_{i-1}^{(n)},x\in\Delta_i^{(n)},$$

$i=1,2,\cdots,m_n$ 于是折线方程为

$$g_n(x)=\begin{cases}g_n^{(1)}(x), & x\in\Delta x_1^{(n)}\\ g_n^{(2)}(x), & x\in\Delta x_2^{(n)}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ g_n^{(m_n)}(x), & x\in\Delta x_{m_n}^{(n)}\end{cases}$$

显然 $g_n(x)\in C_0[a,b]$ 且有 $m_i^{(n)}\leqslant g_n^{(i)}(x)\leqslant M_i^{(n)}$，$x\in\Delta x_i^{(n)}$。于是

$$\underline{S}(\Delta_n)\leqslant\sum_{i=1}^{m_n}g_n^{(i)}(x_i^{(n)})\Delta x_i^{(n)}\leqslant\overline{S}(\Delta_n).$$

又 $g_n\in C_0[a,b]\Rightarrow g_n\in R[a,b]$。

$$\underline{S}(\Delta_n)\leqslant\int_a^b g_n(x)dx\leqslant\overline{S}(\Delta_n).$$

显然有 $\underline{S}(\Delta_n)\leqslant\int_a^b f(x)dx\leqslant\overline{S}(\Delta_n)$

$$\Rightarrow\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g_n(x)dx\right|\leqslant\overline{S}(\Delta_n)-\underline{S}(\Delta_n)$$

由可积准则即得证。

本节共有六个例题，有些题难度较大，不能要求学生独立完成，也不能在习作课中全部采用。但这些例题也是本节的基本内容；学完本节后，有能力的学生不妨试着去作，例如例5虽属一些新的内容，留在此可以使学生开阔眼界，不管怎样，本节开始对于定积分定义提出的几点应深入理解，才是最基本要求。

§2 定积分的性质

定积分的基本性质要求学生自己能够证明，但应注意在证明中一般函数极限的性质不能照搬，例如“若 $f\in R[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上的积分值是唯一的”，这一性质的证明就不能简单地用“函数极限的唯一性”定理直接推出来。虽然如此，它们的证明精神还是一致的。

例1 证明：若 $f\in R[a,b]$，则 f 在 $[a,b]$ 上的积分值

唯一。

证 $f\in R[a,b]$，假设 f 在 $[a,b]$ 上有一个积分值 I_1，那么

$\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta_1(\varepsilon)>0$，对于任意分法 Δ'；任意取法 ξ'，

当 $\lambda'(\Delta')<\delta_1(\varepsilon)$ 时有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i'-I_1\right|<\varepsilon$。

如果 f 在 $[a,b]$ 上的积分又有一个值 I_2，那么对同一个 $\varepsilon>0$，$\exists \delta_2(\varepsilon)>0$，对于任意分法 Δ''，任意取法 ξ''，当 $\lambda''(\Delta'')<\delta_2(\varepsilon)$ 时有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'')\Delta x_i''-I_2\right|<\varepsilon$。

现在取 $\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}$，$\Delta'=\Delta''=\Delta$，$\xi'=\xi''=\xi$。当 $\lambda(\Delta)=\lambda'(\Delta')=\lambda''(\Delta'')<\delta$ 时，有

$$|I_1-I_2|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I_1\right|+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi)_i\Delta x_i-\right.$$

$$\left.-I_2\right|<2\varepsilon.$$ 由 ε 的任意性可知 $I_1=I_2$。

$\therefore$ f 在 $[a,b]$ 上的积分值是唯一的。

例2 证明：若 $f\in R[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

证 用反证法：假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 无界，则对任意分法 Δ，至少存在一个子区间 $\Delta_k=[x_{k-1},\ x_k]$ 使 $f(x)$ 在 Δ_k 上无界。

$\because$ $f\in R[a,b]$，则对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，对于任意分法 Δ，任意取法 ξ，只要 $\lambda(\Delta)<\delta(\varepsilon)$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon/2.$$

对于取定的分法Δ，设f在Δ_k上无界。即

$\forall E>0$，$\exists x_k'\in\Delta_k$，使$|f(x_k')|\geqslant E$　　　　（1）

我们选两种取法ξ，ξ'使

$\xi_i=\xi_i'$　$(i\neq k)$　则

有
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

则有
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i - I\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

但是
$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i\right|$$

$$=\left|f(\xi_k)\Delta x_k - f(\xi_k')\Delta x_k\right|$$

$$=\left|f(\xi_k)-f(\xi_k')\right|\,|\Delta x_k|$$

故$|f(\xi_k)-f(\xi_k')|\,|\Delta x_k|<\varepsilon$。

由此又有
$$\left|f(\xi_k)\right| < \frac{\varepsilon}{\Delta x_k} + \left|f(\xi_k')\right|$$

如固定了ξ'，那么$\dfrac{\varepsilon}{\Delta x_k}+|f(\xi_k')|=$常数，比如说它是$E$。上边不等式就是$|f(\xi_k)|<E$，这里的$\xi_k$如果等于$x_k'$的话，便和（1）矛盾了。所以$f(x)$在$[a,b]$有界。

上题也可以证明其逆否命题：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 无界，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积。

例3 证明：若 $f\in R[a,b]$，则改变 f 在 $[a,b]$ 上有限个点处的值不改变 f 在 $[a,b]$ 上的可积性与积分值。

证 只考虑改变 f 在 $[a,b]$ 上一点处的值的情形。

设 $c\in[a,b]$。

任取 $M\neq f(c)$，作

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq c \\ M, & x=c \end{cases} \quad x\in[a,b]$$

$\because$ $f(x)\in R[a,b]$，$\therefore$ f 在 $[a,b]$ 有界。

而 $F(x)$ 仅在 $x=c$ 点与 f 值不同，所以 F 在 $[a,b]$ 也有界，不妨设 $|f(x)|\leqslant K$，$|F(x)|\leqslant K$，$x\in[a,b]$，（K 为常数）

设 $I=\int_a^b f(x)dx$。

即 $\forall\varepsilon_1>0$，$\exists\,\delta(\varepsilon_1)>0$，对于任意分法 Δ，任意取法 ξ，当 $\lambda(\Delta)<\delta(\varepsilon_1)$ 时有 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon_1$。

现在在 $[a,b]$ 任作一分法 $\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，记 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$。

下面分两种情形讨论：

(i) 当 $c\in\Delta$ 时，即 c 为一分点，记 $c=x_k$。

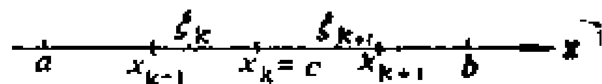


图 22

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\,\Delta x_i-I\right|$$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|$$

$$\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|$$

$$=|F(\xi_k)-f(\xi_k)|\Delta x_k+|F(\xi_{k+1})-f(\xi_{k+1})|\Delta x_{k+1}$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\leqslant$$

$$\leqslant 4K\lambda+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<4K\lambda+\varepsilon_1.$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$，要使

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

只要 $4K\lambda+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。

即 $\lambda<\frac{\varepsilon}{8K}$，取 $\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\frac{\varepsilon}{8K}$。再取

$\delta(\varepsilon)=\min\left(\frac{\varepsilon}{8K},\ \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$，当 $\lambda(\Delta)<\delta(\varepsilon)$ 时有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon.$$

▲ $\int_a^b F(x)\mathrm{d}x=I=\int_a^b f(x)dx$.

(ii) 当 $c\overline{\in}\Delta$，即 c 不是分点时

设 $c\in(x_{k-1}, x_k)$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i - I\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{n}(F(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\right|$$

$$+\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|$$

$$\leqslant |F(\xi_k)-f(\xi_k)|\,|\Delta x_k| + \left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|$$

$$\leqslant 2K\lambda+\varepsilon_1.$$

$\forall\varepsilon>0$，对于$\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，要使 $2K\lambda+\varepsilon_1<\varepsilon$，即

$2K\lambda+\dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，只要$\lambda<\dfrac{\varepsilon}{4K}$，取 $\delta(\varepsilon_1)=\dfrac{\varepsilon}{4K}$，再取

$\delta(\varepsilon)=\min\left(\dfrac{\varepsilon}{4K}, \delta(\varepsilon_1)\right)$，则 $\forall\lambda<\delta(\varepsilon)$，对于任意分法和取法有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<\varepsilon$$

$$\therefore\quad \int_a^b F(x)dx=\int_a^b f(x)bx.$$

例4 设 $y=\varphi(x)$，$(x\geqslant 0)$ 是严格单调增加的连续函数，$\varphi(0)=0$，$x=\psi(y)$是它的反函数，证明：

$$\int_0^a \varphi(x)dx+\int_0^a \psi(y)dy\geqslant ab,\quad (a\geqslant 0,\ b\geqslant 0)$$

证 因为 $y=\varphi(x)$严格单调增加且连续，所以存在严格单调增加且连续的反函数 $x=\psi(y)$，且$\varphi(x)$，$\psi(y)$ 均在 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$上可积。

(i) 若 $\varphi(a)=b$。

任取一个分法$\Delta=\{0=x_0<x_1<\cdots<x_n=a\}$

取 $\xi_i=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$

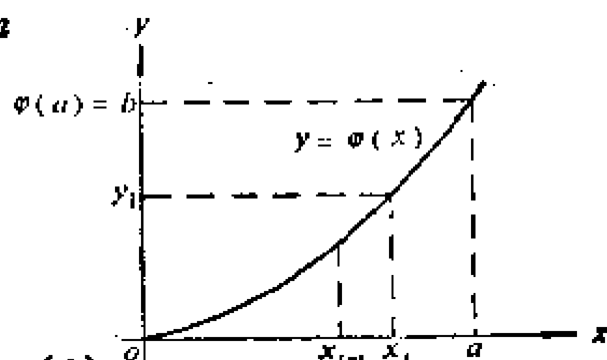


图 23

则 $\int_a^b\varphi(x)dx$

$$=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\Delta x_i \quad (1)$$

设 $\varphi(x_i)=y_i$，则对应于$[0,a]$的分法Δ，相应有$[0,b]$的分法$\Delta'=\{0=y_0<y_1<\cdots<y_n=b=\varphi(a)\}$，因为$\lambda(\Delta)\to 0$，则 $\lambda(\Delta')\to 0$，取 $\xi_i'=y_{i-1}$，则 $\int_a^b\psi(y)dy=$

$$=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\psi(y_{i-1})\Delta y_i \qquad (2)$$

$\because$ $\varphi(x_i)=y_i$，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\psi(y_i)-\psi(y_{i-1})$，代入（1）式

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi(x_i)\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}y_i(\psi(y_i)-\psi(y_{i-1}))$$

$$=y_1(\psi(y_1)-\psi(y_0))+y_2(\psi(y_2)-\psi(y_1))+\cdots$$

$$+y_{n-1}(\psi(y_{n-1})-\psi(y_{n-2}))+y_n(\psi(y_n)-\psi(y_{n-1}))$$

$$=-(y_1-y_0)\psi(y_0)-(y_2-y_1)\psi(y_1)-$$

$$-\cdots-(y_{n-1}-y_{n-2})\psi(y_{n-2})-(y_n-y_{n-1})\psi(y_{n-1})+y_n\psi(y_n)$$

$$=-\sum_{i=1}^{n}\psi(y_{i-1})(y_i-y_{i-1})+b\cdot a=-\sum_{i=1}^{n}\psi(y_{i-1})\Delta y_i+b\cdot a,$$

上面等式两边取极限得

$$\int_0^a \varphi(x)dx = -\int_0^b \psi(y)dy + a \cdot b.$$

即 $$\int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy = a \cdot b.$$

(ii) 若 $b < \varphi(a)$

由 $\varphi(0)=0$，$\psi(x)$ 单调增加，则有 $0 \leqslant b < \varphi(a)$，由连续函数介值定理，$\exists\, 0 < a_1 < a$，使 $\varphi(a_1) = b$，则

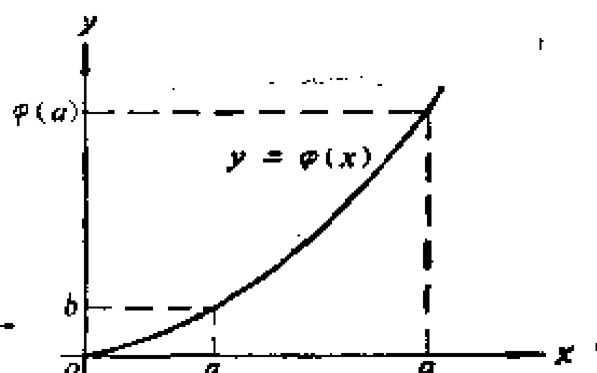


图 24

$$\int_0^a \varphi(x)dx = \int_0^{a_1} \varphi(x)dx + \int_{a_1}^a \varphi(x)dx$$

由 (i) $\int_0^{a_1} \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy = a_1 b$

又因为 $y=\varphi(x)$ 单调增加，所以在 $[a_1, a]$ 上 $\varphi(x) \geqslant \varphi(a_1)$，

$\therefore$ $\int_{a_1}^a \varphi(x)dx \geqslant \int_{a_1}^a \varphi(a_1)dx = \varphi(a_1)(a - a_1) = ab - a_1 b.$

$\therefore$ $\int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy = a_1 b + \int_{a_1}^a \varphi(x)dx$

$\geqslant a_1 b + ab - a_1 b = a \cdot b.$

(iii) 若 $\varphi(a) < b$.

存在 $b_1 = \varphi(a) < b$，则

$$\int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^b \psi(y)dy$$

$$= \int_0^a \varphi(x)dx + \int_0^{b_1} \psi(y)dy + \int_{b_1}^b \psi(y)dy$$

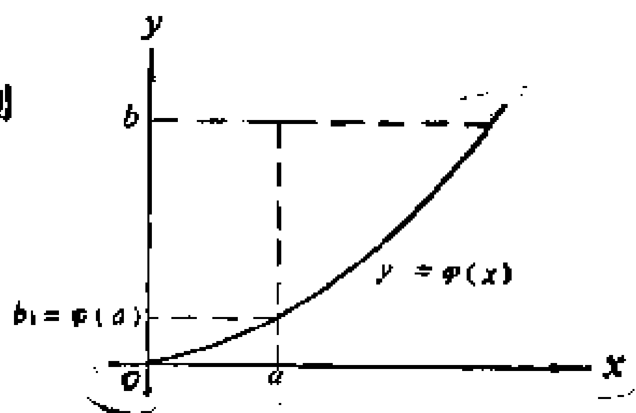


图 25

$$=ab_1+\int_{b_1}^{b}\psi(y)dy\geqslant ab_1+\int_{b_1}^{b}\psi(b_1)dy=ab_1+\psi(b_1)(b-b_1)=$$
$$=ab$$

∴ 由 (i) (ii) (iii)得知$\int_0^a\varphi(x)dx+\int_0^b\psi(y)dy\geqslant a\cdot b$。

例4是证明题中比较复杂的题目，其中第(i)部分证明时还是有些技巧，虽可留作习题，学生未必都能作得完整，因此可在习作课中作些提示后，让学生完整的作出，同时还可让学生证明定积分其它性质。

例如：(i)设$f(x)$在〔a,b〕和〔b,c〕上可积，则f在〔a,c〕上可积，且

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

(ii) 设 $f(x)$，$g(x)\in R[a,b]$，$a<b$ 且 $f(x)\leqslant g(x)$，$x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)dx\leqslant\int_a^b g(x)dx$$

(iii) 设$f(x)\in R[a,b]$，则 $|f(x)|\in R[a,b]$，且有

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\left|\int_a^b|f(x)|dx\right|$$

下面利用定积分的性质，证明一些命题，以提高学生解题能力。

例5 设 $f(x)$，$g(x)$在〔a,b〕连续，证明 Schwarz 不等式。

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},\ (a<b)$$

证 对于任意 t，有 $(tf(x)+g(x))^2\geqslant 0$。

$$\therefore\quad \int_a^b (tf(x)+g(x))^2dx=\int_a^b [t^2f^2(x)+g^2(x)+$$
$$+2tf(x)g(x)]dx\geqslant 0.$$

即 $$\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]t^2+2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]t+\int_a^b g^2(x)dx\geqslant 0.$$

令 $A=\int_a^b f^2(x)dx$，$B=\int_a^b f(x)g(x)dx$, $C=\int_a^b g^2(x)dx$。

则 $At^2+2Bt+C\geqslant 0$。对一切 t 均成立。

则必有判别式 $B^2-AC\leqslant 0$。

即 $$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)dx\cdot\int_a^b g^2(x)dx.$$

即 $$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leqslant\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[\int_a^b g^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}.$$

上述不等式成立的条件还可以放宽，只要求 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，因为证明中只用到可积及几个基本性质。

例6 若 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，应用Schwarz不等式证明：

（1）柯西不等式：

$$\left[\int_a^b [f(x)+g(x)]^2dx\right]^{\frac{1}{2}}\leqslant\left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

（2）$f(x)>0$，$x\in[a,b]$。则

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

（3）证明：若 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=0$，则

$$M^2\leqslant(b-a)\int_a^b f'^2(x)dx,\text{其中}M=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|.$$

证明从略。

例7 利用定积分定义求数列的极限：

（1）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n-1}{n}\pi\right)$

解 上式 $=\frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i-1}{i}\pi\right)\right)$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x dx=\frac{2}{\pi}.$$

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-n^2}{n^3}+\frac{2^2-n^2}{n^3}+\cdots+\frac{n^2-n^2}{n^3}\right)$

解 上式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n^2}-1\right)+\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2-1\right)+\cdots\right.$

$$\left.+\left(\left(\frac{n}{n}\right)^2-1\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{i}{n}\right)^2-1\right)\right]=\int_0^1(x^2-1)dx$$

$$=-\frac{2}{3}.$$

§3 积分中值定理及其应用

积分中值定理无论在理论上或在应用上在积分学中都有重要意义，因此要求学生深入掌握其条件、结论及其证法，并能应用它解决有关问题。

积分第一中值定理：设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，且

$m\leqslant f(x)\leqslant M$，$x\in(a,b)$，$g(x)$在$[a,b]$上不变号，则存在$\mu\in[m,M]$，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=\mu\int_a^b g(x)dx.$$

若条件加强为$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积，则在$g(x)$在$[a,b]$上不变号的条件下，存在$\xi\in[a,b]$

使
$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

若$g(x)\equiv 1$，则上述定理改为：若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi\in[a,b]$，有

$$\int_a^b f(x)dx=f(\xi)(b-a).$$

上述定理中“$g(x)$在$[a,b]$上不变号”这一条是重要的，在应用时学生往往忽略检验这一条，可在习作课上举出反例。

积分第二中值定理：设$f(x)$在$[a,b]$上可积，而$g(x)$在$[a,b]$上单调，那末在$[a,b]$上存在ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(a)\int_a^{\xi}f(x)dx+g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx \qquad (1)$$

特别，如果$g(x)$单调上升且$g(a)\geqslant 0$，那末有ξ，使

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=g(b)\int_{\xi}^b f(x)dx \qquad (2)$$

公式（2）是经常用到的。

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx=0$.

证 设$f(x)=\frac{1}{1+x}$，$g(x)=x^n$.

显然$f(x)$，$g(x)$在$[0,1]$上连续，$g(x)$在$(0,1)$可微且在$[0,1]$上不变号，由积分中值定理：

$$I_n=\int_0^1\frac{x^n dx}{1+x}=\frac{1}{1+\xi}\int_0^1 x^n dx=\frac{1}{1+\xi}\ \frac{1}{1+n}\ (0<\xi<1).$$

故 $0<I_n<\dfrac{1}{1+n}$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty} I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\ \frac{1}{1+n}=0.$$

例 2 估计积分$\int_a^b \sin x^2 dx$，$(0<a<b)$。

解 $\int_a^b \sin x^2 dx=\int_a^b \frac{1}{x}x\sin x^2 dx$。

设 $f(x)=x\sin x^2$，$g(x)=\dfrac{1}{x}$，$f(x)$，$g(x)$在$[a,b]$可积，且 $g'(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$。

$$\int_a^b \sin x^2 dx=g(a)\int_a^\xi f(x)dx+g(b)\int_\xi^b f(x)dx$$

$$=g(a)\left[\frac{1}{2}\sin x^2\right]\Big|_a^\xi+g(b)\left[\frac{1}{2}\sin x^2\right]\Big|_\xi^b$$

$$=\frac{1}{2a}(\sin\xi^2-\sin a^2)+\frac{1}{2b}(\sin b^2-\sin\xi^2)$$

$$\therefore\quad \left|\int_a^b \sin x^2 dx\right|\leqslant\frac{1}{a}+\frac{1}{b},$$

$$\therefore\quad \int_a^b \sin x^2 dx=\frac{(a+b)\theta}{ab},\quad |\theta|\leqslant 1.$$

例 3 证明

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0,\quad (p>0\text{ 为常数})。$$

证 $g(x)=\frac{1}{x}>0$，$g'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$，$x\in[n,n+p]$

由第二积分中值定理，有

$$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{n}\int_n^{\xi}\sin x dx,\quad n\leqslant\xi\leqslant n+p.$$

$$=\frac{1}{n}(\cos n-\cos\xi).$$

故 $\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx\right|\leqslant\frac{2}{n}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=0$。

***例 4** 设 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $[a,b]$ 上任作一分法 Δ：

$\Delta=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$，

记 $\lambda(\Delta)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{|x_i-x_{i-1}|\}$。

证明：$\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx$，

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$

证 $\because f(x)\in R[a,b]$，$g(x)\in R[a,b]$。

故 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)f(\xi_i)\Delta x_i$，

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$。

考察 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_i)\Delta x_i-\sum\limits_{i=1}^{n}g(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dx\right.$

$$=\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\left[f(\xi_i)\Delta x_i-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right]\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|g(\xi_i)\right|\left|f(\xi_i)\Delta x_i-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right|$$

∵ $g(x)$在〔a,b〕可积，所以$g(x)$在〔a,b〕有界。设 $|g(x)|\leqslant M$（M为正常数），则

$$\text{上式}\leqslant M\sum_{i=1}^{n}\left|f(\xi_i)\Delta x_i-\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right|$$ 因为 $f(x)$在〔a,b〕连续，由积分中值定理

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx=f(\eta_i)\Delta x_i,\quad \eta_i\in[x_{i-1},x_i].$$

$$\text{则上式}\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)\Delta x_i-f(\eta_i)\Delta x_i|$$

$$=M\sum_{i=1}^{n}|f(\xi_i)-f(\eta_i)|\Delta x_i.$$

∵ $f(x)$在〔a,b〕连续，所以$f(x)$在〔a,b〕一致连续。则对于任意给定$\varepsilon>0$，对于$\dfrac{\varepsilon}{(b-a)M}>0$，存在一致可用的$\delta(\varepsilon)>0$，只要$\lambda(\Delta)<\delta$，就有$|\xi_i-\eta_i|<\delta(\varepsilon)$，使

$$\left|f(\xi_i)-f(\eta_i)\right|<\frac{\varepsilon}{(b-a)M},\quad (i=1,2\cdots n)$$

∴ 只要$\lambda(\Delta)<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)f(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx\right|$$

$$\leqslant M\frac{\varepsilon}{(b-a)M}\cdot(b-a)=\varepsilon,$$

故 $\int_a^b f(x)g(x)dx=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx,$

$\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ 。

此例中的条件"$f(x)$在$[a,b]$上连续",若改为"$f(x)$在$[a,b]$上可积"其余条件不变，则结论仍成立，可让学生自己练习证明。

§4 定积分计算的牛顿—莱布尼兹公式

牛顿—莱布尼兹公式是定积分计算的基础，此公式建立了微分与积分之间的联系，使我们能用函数的原函数来计算定积分。

（1）给定函数 $y=f(x)$，f 在 $[a,b]$ 的任一子区间上可积，则称 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为积分上限的函数。

（2）若 $f\in R[a,b]$，则 $\Phi(x)$在$[a,b]$上连续。

（3）若 f 在 $[a,b]$ 上连续，则$\Phi(x)$在$[a,b]$可微，且 $\Phi'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$ 。

（4）若 $f(x)$在$[a,b]$连续，$F(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且$F'(x)=f(x)$，$x\in[a,b]$，则 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

称为牛顿—莱布尼兹公式。

要求读者对此公式有比较透彻的理解，特别要注意公式的条件，否则会得出错误的结果。

例1 求下列每个函数的导数：

（1） $\Phi(x)=\int_a^{x^3}\sin^3 t dt$。

解 $\Phi'(x)=(\sin^3 x^3)\cdot 3x^2$。

（2） $\Phi(x)=\int_a^{\int_1^x \sin^3 t dt}\frac{1}{1+\sin^6 t+t^2}dt$。

解 $\Phi'(x)=\frac{1}{1+\sin^6(\int_1^x \sin^3 t dt)+(\int_1^x \sin^3 t dt)^2}\cdot\sin^3 x$。

（3） $\Phi(x)=\int_x^b \frac{1}{1+t^2+\sin^2 t}dt$。

解 $\Phi'(x)=-\frac{1}{1+x^2+\sin^2 x}$。

（4） $\Phi(x)=\sin\left[\int_0^x\left(\int_0^y \sin^3 t dt\right)dy\right]$。

解 $\Phi'(x)=\cos\left[\int_0^x\left(\int_0^y \sin^3 t dt\right)dy\right]\cdot\left(\int_0^x \sin^3 t dt\right)$。

（5） Φ^{-1} 为 $\Phi(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$ 的反函数，求用 Φ^{-1} 表示的 $(\Phi^{-1}(x))'$。

解 $(\Phi^{-1}(x))'=\frac{1}{\Phi'(\Phi^{-1}(x))}=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-[\Phi^{-1}(x)]^2}}}$

$$=\sqrt{1-[\Phi^{-1}(x)]^2}。$$

例2 若 $\Phi(x)=\int_0^x xf(t)dt$，求 $\Phi'(x)$。

解 $\Phi(x)=x\int_0^x f(t)dt$，于是

$$\Phi'(x)=xf(x)+\int_0^x f(t)\,dt.$$

例3 证明：若 f 连续，则

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du.$$

证 若 $\Phi(x)=\int_0^x f(u)(x-u)\,du$

$$=\int_0^x xf(u)\,du-\int_0^x uf(u)\,du.$$

则 $\Phi'(x)=\left[xf(x)+\int_0^x f(u)\,du\right]-xf(x)=\int_0^x f(u)\,du$. 从而存在某个数 C，使得

$$\int_0^x f(u)(x-u)\,du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du+C,\text{ 对于所有 } x$$

显然 $C=0$，因为当 $x=0$时，另外两项都等于零。

利用牛顿—莱布尼兹公式求定积分是有一定限制的，如有的函数其原函数不能用有限个初等函数表示，例如 e^{-x^2}，$\sin x^2\cdots$，还有的函数在 $[a,b]$ 上不存在原函数，但却是可积的。

例如：
$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

上面的函数只在 $x=1$点间断，其它各点均连续，所以 $f(x)$在 $[0,2]$ 上可积，但 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 不存在原函数（因为导函数的间断点必为第二类间断点，而上面的间断点是第一类间断点）。

在应用牛顿—莱布尼兹公式计算定积分时，一定要注意公式的条件，否则计算会发生错误，下面例题将说明这方面

的问题。

例 4 以下计算是否正确？

（1）$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-2$。

（2）$\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x}$。

$\because \quad \int\frac{dx}{2+\cos 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{\text{tg}x}{\sqrt{3}}=F(x)$

$\therefore \quad I=F(\pi)-F(0)=0$。

答 （1）的计算是错误的，因为$\frac{1}{x^2}$在〔-1, 1〕上无界，所以不能用牛顿—莱布尼兹公式。

（2）的计算也是错误的，因为$F(x)$不是$\frac{1}{2+\cos 2x}$在〔0,π〕上的原函数。

积分 $\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x}=\frac{1}{\sqrt{3}}\text{arc tg}\frac{\text{tg}\,x}{\sqrt{3}}\Big|_0^{\pi}$，

于 $x=\frac{\pi}{2}$时产生广义性，为了避免出现广义积分，可按下法进行计算。

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{du}{2+\cos u}=\int_0^{\pi}\frac{du}{2+\cos u}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{2+\cos u}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{du}{2+\cos u}$$

对后一积分作代换，$u=\pi-t$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{du}{2+\cos u}=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{-dt}{2+\cos(\pi-t)}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2-\cos t}$$

由此，

$$\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{2+\cos 2x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2+\cos x}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{2-\cos x}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

§5 定积分的计算

定积分的计算如果用牛顿—莱布尼兹公式，必须先求原函数，而且在应用公式时还要注意条件，其它还有换元法和分部积分法，下面只举几个例题说明在计算定积分时应注意的问题。

例1 计算 $f(x)=\int_{0}^{1}t|t-x|dt$.

解 当 $x>1$时，$f(x)=\int_{0}^{1}t(x-t)dt=\frac{x}{2}-\frac{1}{3}$；

当 $x<0$时，$f(x)=\int_{0}^{1}t(t-x)dt=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}$，

当 $0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=\int_0^x t(x-t)\,dt+\int_x^1 t(t-x)\,dt$

$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}.$$

$$\text{故}\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{x}{2}, & x<0\\ \frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{x}{2}-\frac{1}{3}, & x>1.\end{cases}$$

例2 计算 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx$。

解 $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,dx=\int_{\frac{1}{e}}^{1}-\ln x\,dx+\int_1^e \ln x\,dx=2\left(1-\frac{1}{e}\right).$

例3 若$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明：

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

证 设 $x=\pi-t$，则 $f(\sin x)=f(\sin(\pi-t))=f(\sin t)$，$dx=-dt$，则 $\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\int_\pi^0(\pi-t)f(\sin t)(-dt)$

$=\int_0^\pi(\pi-t)\,f(\sin t)\,dt=\int_0^\pi \pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi tf(\sin t)\,dt$

$=\int_0^\pi \pi f(\sin t)\,dt-\int_0^\pi xf(\sin x)\,dx.$

$$\therefore\quad \int_0^\pi xf(\sin x)\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\,dx.$$

例4 以下计算错在何处?

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}$$

设 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{1}\frac{-dt}{1+t^2}=-\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}.$$

$\therefore$ $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=0$。 但是

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2}=\text{arc tg}\,x\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{2}.$$

在作定积分的换元法则时，应注意设 $x=\varphi(t)$ 时，$\varphi(t)$ 必须在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $\varphi(\alpha)=0$，$\varphi(\beta)=b$，此例 $x=\frac{1}{t}$ 在 $t=0$ 不连续。

例5 计算 $I=\int_{1}^{4}\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

解 设 $x=t^2$，$dx=2tdt$，当 $x=1$ 时，$t=\pm 1$。

$x=4$ 时，$t=\pm 2$。

可以用以下两种作法：

$$I=\int_{1}^{2}\frac{2tdt}{1+|t|}=\int_{1}^{2}\frac{2tdt}{1+t}=2-2(\ln 3-\ln 2).$$

或

$$I=\int_{-1}^{-2}\frac{2tdt}{1+|t|}=\int_{-1}^{-2}\frac{2tdt}{1-t}=2-2(\ln 3-\ln 2).$$

例6 计算 $I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$.

解 设 $x=\sin t$，$dx=\cos t dt$。

取 $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}$。

或 $I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\cos t dt=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\cos^2 t dt=\frac{\pi}{2}$。

例7 计算 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$。

解 求被积函数的原函数是困难的，但如果作适当的换元，则可简单地算出积分。

$$I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x dx}{1+\cos^2 x}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=I_1+I_2$$

对于 I_2，设 $x=\pi-t$，则有

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}dt.$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx.$$

$$\therefore\quad I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\sin t}{1+\cos^2 t}dt=-\pi\operatorname{arctg}(\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^2}{4}.$$

例8 已知 $f(\xi)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，

$F(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)dt$，$\delta>0$ 为常数。

证明：1）$F'(x)$ 存在且连续，$-\infty<x<+\infty$。

2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $|F(x)-f(x)|<\varepsilon$，$a\leqslant x\leqslant b$，a、b 为任意常数。

证 1) 设 $\mu=x+t$，则 $d\mu=dt$。

$$F(x)=\frac{1}{2\delta}\int_{x-\delta}^{x+\delta}f(\mu)d\mu.$$

$$=\frac{1}{2\delta}\left[\int_{x-\delta}^{c}f(\mu)d\mu+\int_{c}^{x+\delta}f(\mu)d\mu\right]$$

$$=\frac{1}{2\delta}\left[\int_{c}^{x+\delta}f(\mu)d\mu-\int_{c}^{x-\delta}f(\mu)d\mu\right]$$

$\therefore\quad F'(x)=\frac{1}{2\delta}\left[f(x+\delta)-f(x-\delta)\right]$.

$\because$ $f(\xi)$在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x+\delta)$、$f(x-\delta)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，所以 $F'(x)$在 $(-\infty,+\infty)$ 存在且连续。

2) $$|F(x)-f(x)|=\left|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)dt-\frac{1}{2\delta}f(x)\int_{-\delta}^{\delta}dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x+t)dt-\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}f(x)dt\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}(f(x+t)-f(x))dt\right|$$

$\because$ $f(\xi)$在 $[A,B]$ 上连续，其中 $A<a$，$B>b$。

$\therefore$ $f(\xi)$在 $[A,B]$ 一致连续。

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta(\varepsilon)>0$，则只要 $x\in[a,b]$，$x+t\in[A,B]$ 且$|t|<2\delta$，就有 $|f(x+t)-f(x)|<\varepsilon$。

$\therefore\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，只要$x\in[a,b]$，$x+t\in[A,B]$

且$|t|<2\delta$时，有

$$|F(x)-f(x)|\leqslant\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\varepsilon dt=\varepsilon.$$

§6 定积分在几何、物理等学科中的应用

通过本节内容的练习和讲解要求学生对于不同内容的实际问题能够通过分析综合，抓住它们的共性归纳为定积分，并能迅速而正确地解决它。同时能够掌握微元法这一常用而有效的工具。

为使学生能够了解积分的广泛应用性，练习的面应当尽量广泛，而我们只选择几个不同学科中应用定积分的例子。

一、定积分在几何中的应用。

利用定积分可以计算平面图形的面积，三维空间体的表面积和体积以及平面曲线的弧长等，由于学时限制，只能有重点地讲解和练习，一般以平面图形的面积作为重点。

1. 平面图形的面积。

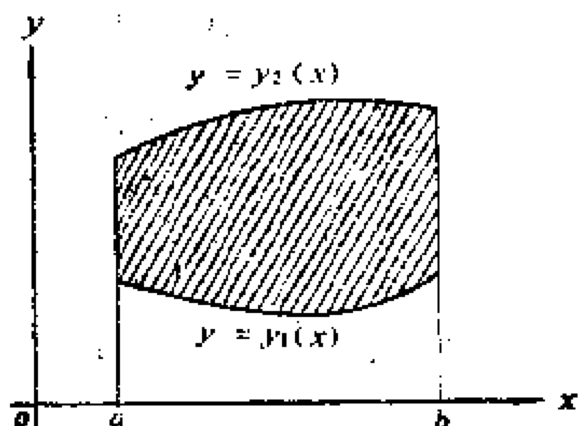


图 26

利用定积分计算平面图形面积的公式有

(1)如图26，曲线$y=y_1(x)\leqslant y=y_2(x)$，$x=a$，$x=b(a<b)$所围图形的面积为

$$S=\int_a^b[y_2(x)-y_1(x)]dx$$

(2)如图27，曲边为$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\end{cases}$的曲边梯形面积为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}y(t)x'(t)dt$$

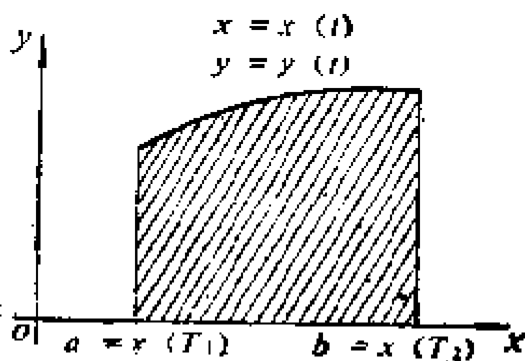


图　27

若$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t),\end{cases}$ $t\in[0,T]$ 表示逐段光滑闭曲线时，则

$$S=-\int_0^T y(t)x'(t)dt$$

$$=\int_0^T x(t)y'(t)dt$$

或$S=\frac{1}{2}\int_0^T[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]dt$.

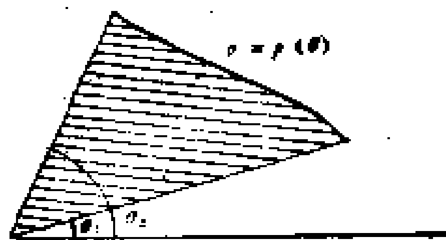


图　28

(3)如图28，曲边为$\rho=\rho(\theta)$的扇形面积为

$$S=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{1}{2}\rho^2d\theta.$$

学生利用定积分在计算面积时往往会得出负值，这是因为在应用(1)中的面积公式时忽略了$y_1(x)$与$y_2(x)$的大小关系，因此处理此类问题经常需判断两函数的大小关系。

例1 求函数 $y=e^x-2$ 在 $[-2,2]$ 间与 x 轴所围曲边梯形的面积。

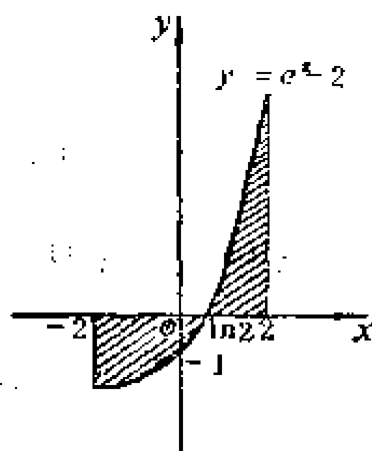


图 29

解 由于 $y=e^x-2$ 为单调增函数，所以只要求出函数的零点即可知函数的正值与负值区间。

令 $e^x-2=0$ 有 $x=\ln 2$

所以所求面积为（应用（1）中公式）

$$S=\int_{-2}^{\ln 2}[0-(e^x-2)]dx+\int_{\ln 2}^{2}[(e^x-2)-0]dx$$

$$=4\ln 2+e^2+e^{-2}-4.$$

对于非曲边梯形的平面图形一般要分割为几个曲边梯形，分别求出它们的面积，这样一方面往往要计算若干条平面曲线交点的坐标，另一方面需要灵活地选择坐标系、积分变量以及各种不同的面积公式。

例2 已知三个半径为 2 的圆，每两个圆都通过第三个圆的圆心，求公共部分的面积。

解法 1 选取坐标系使某一圆的圆心为原点，另一圆的圆心在 x 轴正向上（如图）

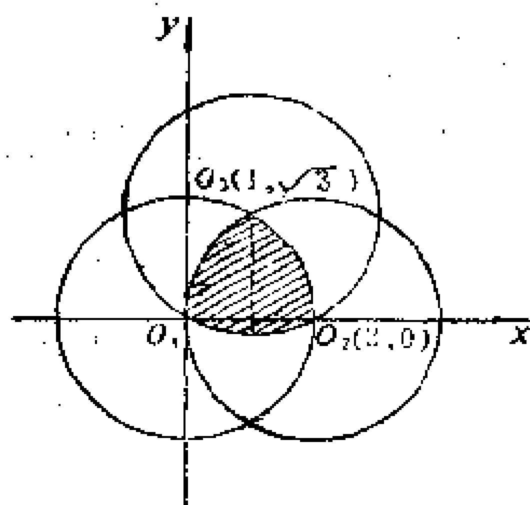


图 30

圆 O_1 方程为 $x^2+y^2=4$

圆 O_2 方程为 $(x-2)^2+y^2=4$

圆 O_3 方程为

$$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$$

采用直角坐标，则有

$$S=\int_0^1\left[\sqrt{4-(x-2)^2}-(\sqrt{3}-\sqrt{3+2x-x^2})\right]dx$$

$$+\int_1^2\left[\sqrt{4-x^2}-(\sqrt{3}-\sqrt{3+2x-x^2})\right]dx=2\pi-2\sqrt{3}.$$

其实由对称性只要计算前一积分后二倍即可。

解法 2 若采用极坐标，由于 O_1 的方程为

$\rho=2$

O_2 的方程为

$\rho=4\cos\theta$.

又因为图中二弓形相等所以所求面积为

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2d\theta+2\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\rho^2d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}2d\theta+\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}16\cos^2\theta d\theta$$

$$=2\pi-2\sqrt{3}.$$

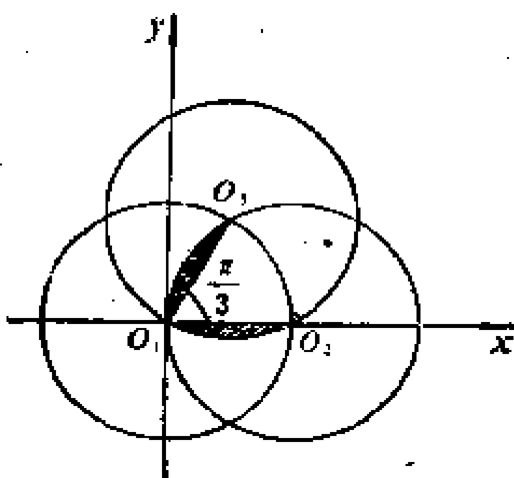


图 31

这后一方法计算量要比前一方法少多了。

解法 3 如果象图32那样选择坐标，只要求出弓形面积×3＋△面积即为所求。

例3 求曲线 $x=2y-y^2$，$x+y=0$ 所围图形的面积。

解 二曲线交点为 $A(-3,3)$，$O(0,0)$。

曲线 $x=2y-y^2$ 可分为两个分支

$$y=1+\sqrt{1-x}$$

$$y=1-\sqrt{1-x}$$

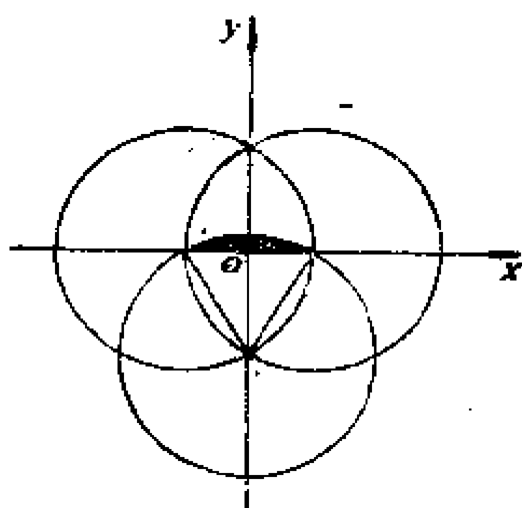


图 32

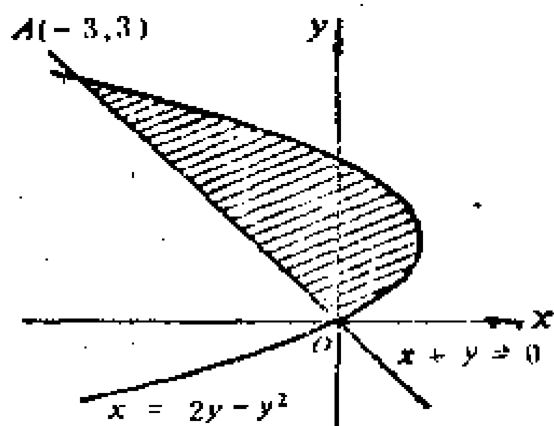


图 33

则面积 $S=\int_{-3}^{0}(1+\sqrt{1-x}+x)dx+$

$$\int_{0}^{1}[(1+\sqrt{1-x})-(1-\sqrt{1-x})]dx=\frac{9}{2}.$$

但若以 y 作为自变量则可简化计算。

$$S=\int_{0}^{3}[(2y-y^2)-(-y)]dy$$

$$=\int_{0}^{3}(3y-y^2)dy=\frac{9}{2}.$$

对于求由参数方程或极坐标方程表示的封闭曲线所围图形面积时，学生往往感到困难的是

(1) 不知怎样确定积分的上下限；

(2) 不会利用图形的对称性以简化计算，这就需要熟悉曲线的图形，由方程了解图形的性质以及灵活运用各种技巧。

例4 求由曲线 $x=a(\cos t+t\sin t)$，$y=a(\sin t-t\cos t)$ $t\in[0,2\pi]$ 及 $x=a$，($y\leqslant 0$) 所围图形的面积。

解1 曲线为圆的渐伸线

$$S=-\int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt-\int_{\overline{AB}} ydx$$

$$=-\int_0^{2\pi} a(\sin t-t\cos t)\cdot at\cos t dt-\int_{\overline{AB}} ydx$$

$$=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)-\int_{\overline{AB}} ydx.$$

∵ $\int_{\overline{AB}} ydx$ 表示沿线段$\overline{AB}$的积分，又因为在$\overline{AB}$上

$dx=0$ 所以$\int_{AB} ydx=0$

∴ $S=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi)$.

解2 对应于$t\in[0,2\pi]$的部分，渐伸线的弧段为$\overset{\frown}{ACB}$，联结$\overline{OB}$。故所求面积为$OACBO$所围面积S_1加上$\triangle OAB$的面积S_2（如图）。

$$S_2=\frac{a}{2}\cdot 2\pi a=\pi a^2.$$

设曲线$\overset{\frown}{ACB}$上点的极坐标为(ρ,θ)则

$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{\theta_1}\rho^2 d\theta$$

$\rho=\rho(\theta)$为圆的渐伸线方程，

$$\rho^2=x^2+y^2=a^2(1+t^2)$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}$$

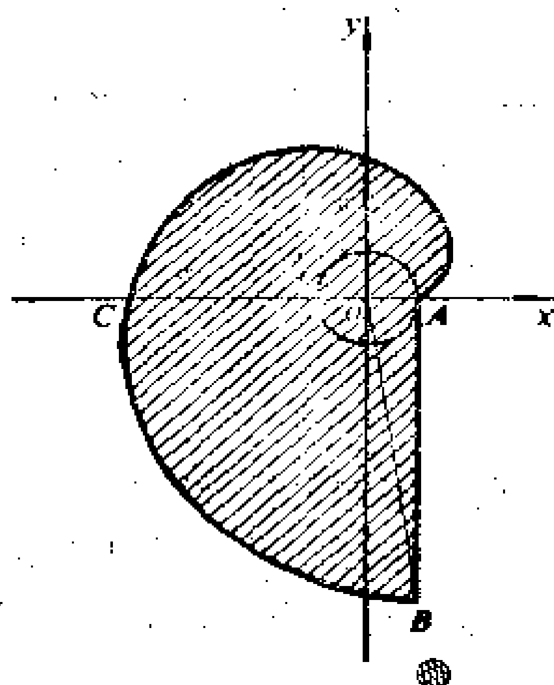


图 34

微分得

$$\sec^2\theta d\theta=\frac{t^2}{(\cos t+t\sin t)^2}dt$$

则
$$d\theta=\frac{1}{\sec^2\theta}\,\frac{t^2}{(\cos t+t\sin t)^2}dt$$
$$=\frac{t^2}{1+t^2}dt$$

故
$$S_1=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1+t^2)\frac{t^2}{1+t^2}dt=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}t^2dt=\frac{4}{3}a^2\pi^3$$

故
$$S=S_1+S_2=\frac{a^2}{3}\left(4\pi^3+3\pi\right).$$

由上例可见计算实际问题时方法可以多样。

例5 求双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积。

解 $S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\rho^2d\theta=a^2$.

这是因为图形关于极轴与极点均为对称的，（前者以

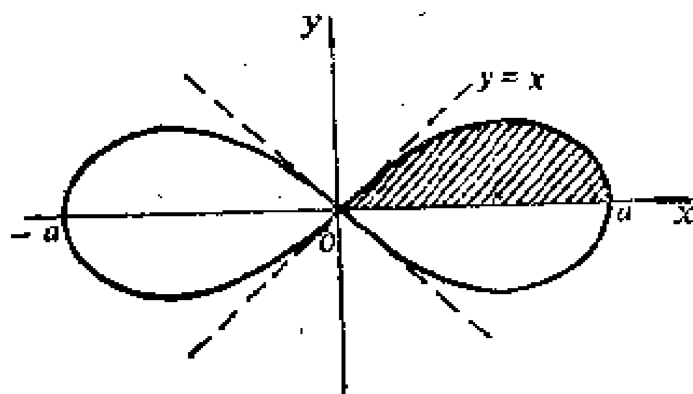


图 35

$-\theta$ 代 θ 方程不变，后者以 $-\rho$ 代 ρ 方程不变）所以只要计算 $\frac{1}{4}$ 图形面积即可（图中阴影部分）。至于积分上限为 $\frac{\pi}{4}$ 是

由于当 $\rho=0$ 时 $\cos 2\theta=0$，$2\theta=\frac{\pi}{2}$ 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$。

例6 求 $\rho=a\sin 3\theta$ 所围图形的面积。

解 由于 $-\rho=a\sin 3(-\theta)$，所以图形关于过极点垂直于极轴的直线是对称的，又由于

$$\rho=a\sin 3\left[2\cdot\frac{\pi}{6}-\theta\right]=a\sin 3\theta$$

所以图形关于 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 是对称的，

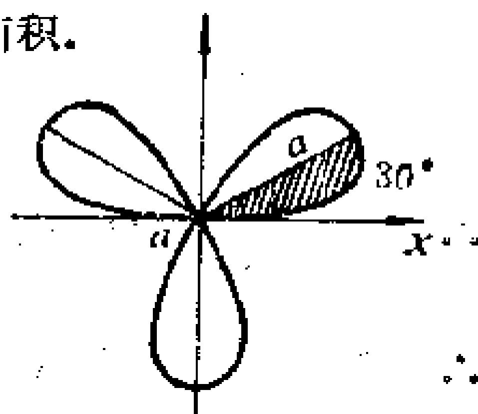


图 36

并且 $\rho=a\sin 3\theta$ 以 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 为周期，所以只计算由 $\theta=0$ 到 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 这一部分的面积即可，即

$$S=6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}a^2\sin^2 3\theta\,d\theta=\frac{\pi a^2}{4}.$$

2. 其他几何应用。

利用定积分除了可计算平面图形的面积，还可以计算平面曲线弧长，旋转体的表面积、体积等，其公式从略，下面仅举几例。

例7 求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$ 一拱的弧长；一拱沿 x 轴旋转一周所成迴转体的表面积和体积。

解 (i) 摆线一拱的弧长为

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt=8a.$$

(ii) 迴转体的表面积为

$$S=2\pi\int_0^{8a} y\,dS$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi a} y\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{2\pi} 2a^2(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\,dt$$

$$=\frac{64}{3}a^2\pi$$

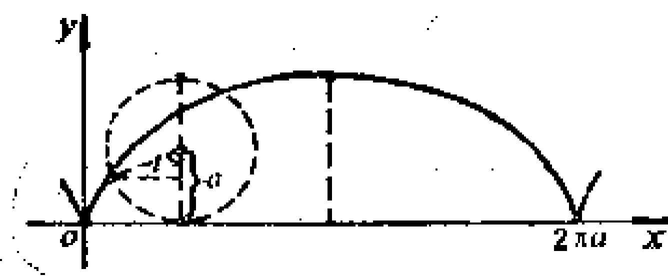


图 37

计算中应注意各式积分上下限的确定，往往在这上面出现错误。

(iii) 迴转体体积为
$V=\pi\int_0^{2\pi} y^2dx=5\pi^2a^3$。

例 8 求悬链线$y=\text{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

在$[a,b]$部分的弧长以及绕x轴旋转所成回转体在$[a,b]$部分的侧表面积。

解 (i) 悬链线在$[a,b]$部分的弧长为

$$\widehat{BM}=L=\int_a^b\sqrt{1+\dot{y}^2}\,dx$$

$$=\int_a^b\sqrt{1+\mathrm{sh}^2x}\,dx$$

$$\int_a^b\mathrm{ch}x\,dx=\mathrm{sh}b-\mathrm{sh}a$$

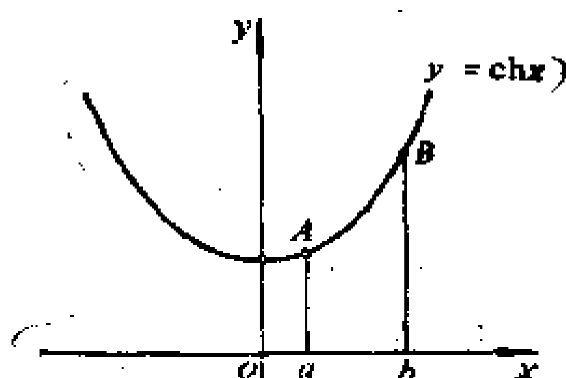


图 38

(ii) 迴转面的侧表面积为

$$S=2\pi\int_a^b\mathrm{ch}^2x\,dx=2\pi\int_a^b\frac{1+\mathrm{ch}2x}{2}dx$$

$$=\pi\left[b-a+\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2b-\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,2a\right].$$

二、定积分在其他学科中的应用—微元法。

微元法是利用定积分解决实际问题常用而有效的一种方法。微元法一般不在正课中讲解，所以可在习作课上介绍，并通过不同类型的例子让学生练习。

利用定积分解决实际问题时，最重要的就是判断要求得

的量能否用定积分表示，设所求的量为M，选择一个变量x，根据实际问题的需要，x的变化范围为一个区间$[a,b]$，M应该是与x有关的量，判断M能用定积分表示的关键就是看M在区间$[a,b]$上是否具有“可加性”，即若把$[a,b]$任意分成许多小区间Δ_i，那么在每个小区间上M具有分量ΔM_i，

而 $M=\sum_{i=1}^{n}\Delta M_i$。另外存在函数$f(x)$，分量$\Delta M_i$可以近似地表示为$\Delta M_i\approx f(\xi_i)\Delta x_i$其中，$\xi_i$为区间$\Delta_i$上任一点，$\Delta x_i$为区间$\Delta_i$的长，当然在理论上要求$\Delta M_i$与$f(\xi_i)\Delta x_i$之差是比$\Delta x_i$高阶的无穷小量，实际应用中并不去检查。

遇到一个实际问题时，首先选择变量x作为积分变量，并确定其变化区间$[a,b]$，再判断所求的量M具有“可加性”这时不必按定积分的定义去做，只要将$[a,b]$分为任意个小区间，任取具有代表性的一个$[x,x+dx]$，找到函数$f(x)$，求出相应在此小区间上M的部分量ΔM的近似值。

$$\Delta M \doteq f(x)dx$$

记作 $$dM=f(x)dx$$

称dM为M的微元，再判断dM与ΔM之差是比Δx高阶的无穷小量，那么以微元dM作为被积表达式，在$[a,b]$上作定积分即得M

$$M=\int_a^b f(x)dx$$

例1 长为L质量为M的均匀细杆，在此杆延长线上有一质量为m的质点，它与细杆近端的距离为d，求细杆对质点

的引力。

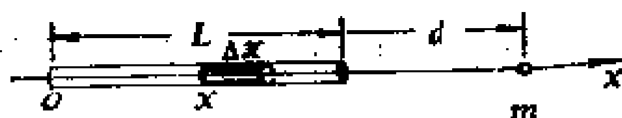


图 29

解 如图选取坐标系，积分变量为x，其变化区间为$[0, L]$，显然引力F对区间$[0, L]$具有可加性。

在坐标为x处取长为dx的一段细杆，先求此段小杆对于质点m（以m表示质量为m的质点）的引力ΔF的近似值dF。由于dx很小，故可以把这一小段杆看作一个质点，其质量集中在点x，它与质点m的距离为$L+d-x$，它的质量为

$\frac{M}{L}dx$，由万有引力定律，它对于质点m的引力（称为引力元素）为

$$dF = K\frac{\frac{M}{L}\cdot m\,dx}{[L+d-x]^2} \qquad (K\text{为引力系数})。$$

再沿杆由0到L积分，得到细杆对质点的引力

$$F = \int_0^L K\frac{mM}{L}\ \frac{dx}{(L+d-x)^2} = \frac{KmM}{d(L+d)}$$

这里需证明引力元素dF与小段杆dx对于质点m的精确引力ΔF之差是比dx高阶的无穷小量，考察小段细杆左端点对质点m的引力最小，而右端点对质点m的引力最大，因此得到不等式 $f(x)dx \leqslant \Delta F \leqslant f(x+dx)dx$

这里 $f(x) = K\frac{mM}{L}\cdot\frac{1}{(L+d-x)^2}$.

所以　　$0 \leqslant \Delta F - f(x)dx \leqslant [f(x+dx) - f(x)]dx$

即　　$0 \leqslant \Delta F - dF \leqslant [f(x+dx) - f(x)]dx$

由$f(x)$的连续性，知

$$\lim_{dx \to 0} f(x+dx) - f(x) = 0.$$

所以

$$\lim_{dx \to 0} \frac{\Delta F - dF}{dx} = 0.$$

即　　$\Delta F - dF$是比dx高阶的无穷小量。

在讲解时可以用定积分定义列出积分式与用微元法列出积分式相比较，一方面说明微元法的正确性，另一方面说明微元法可以简化解题过程。

例2　求曲线$y=f(x)$上相应于x从a到b的一段弧的长度s。

解　以x作为积分变量其变化区间为$[a, b]$，弧长s显然是与x有关的量，且具有可加性，在$[a, b]$上任取小区间

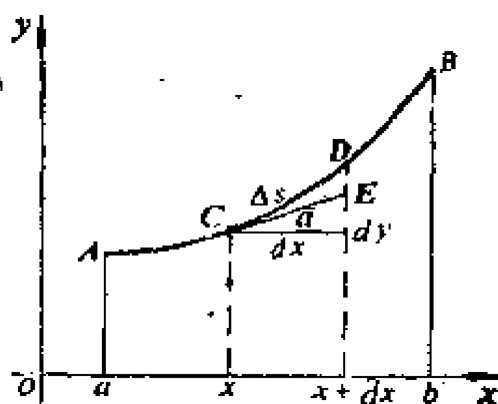


图　40

$[x, x+dx]$，相应于$[x, x+dx]$上的小弧段长Δs近似于该曲线在点$[x, f(x)]$处的切线段$\overline{CE}$的长度。

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+(f'(x))^2}\ \ dx$$

这就是弧长 s 的微元，于是有

$$s=\int ds=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

这里还应证明ds与Δs之差是比Δx高阶的无穷小量，这一步一般来说不必要每题必证，但应注意如果微元取得不恰当往往出现错误，例如 取dx作为弧长元素，由于

$dx=\cos\alpha ds$（见图）dx与Δs之差不是比Δx高阶的无穷小量，计算结果

$$s=\int_a^b dx=b-a$$

显然是错误的。

例 3 三角形闸门竖在水中上，底长为 a，高为 h，上底与水面平，求闸门受水的压力。

解 按图建立坐标系，取z为积分变量，则积分区间为$[0,h]$，在闸门上任取一小条$ABCD$的梯形，高为dz。

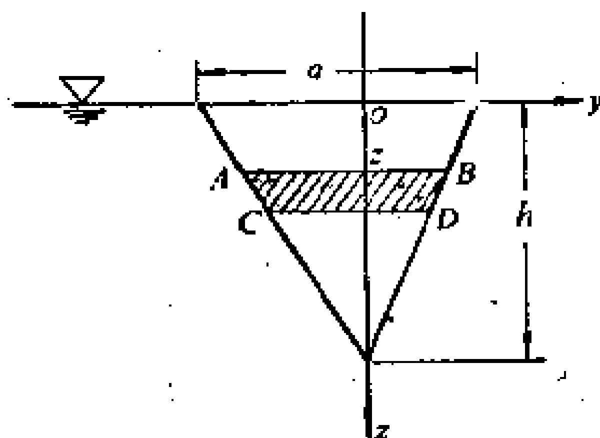


图 41

$$\overline{AB}=\frac{a}{h}\ (h-z)$$

小梯形面积近似为$ds=\frac{a}{h}(h-z)dz$。

则小梯形每一点均可近似看作在水深为z处，则所受水的压力可近似为

$$dp=\frac{a}{h}(h-z)zdz$$

dp即为压力的微元，则三角形闸门所受水压为

$$p=\int_0^h\frac{a}{h}(h-z)zdz=\frac{ah^2}{6}.$$

§7 定积分存在的充分必要条件

一般教科书中给出的定积分存的充要条件都是以达布定理作为基础的，以下我们设$f(x)$在$[a,b]$有界。

达布大和：$S=\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i$。

达布小和：$s=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i$。

其中M_i,m_i分别为$f(x)$在区间$[x_{i-1},x_i]$的上、下确界。

由一切分法得到的大和的集合$\{S(\Delta)\}$有下确界L，小和的集合$\{s(\Delta)\}$有上确界l。它们具有性质：$m(b-a)\leqslant s\leqslant l\leqslant L\leqslant S\leqslant M(b-a)$，$M,m$分别为$f$在$[a,b]$的下、上确界。

达布定理：$f(x)$是任意有界函数，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，对于适合$\lambda(\Delta)<\delta$的任意分法Δ有

(1)　$|S-L|<\varepsilon$，　即　$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}S=L$。

(2) $|s-I|<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0} s=I$。

定积分存在的充要条件：

一、（可积准则Ⅰ）函数$f(x)\in R[a,b]$，设$\int_a^b f(x)dx=$ $=I$。$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0$，$\exists \delta(\varepsilon)>0$，对于满足$\lambda(\Delta)<\delta$的任意分法$\Delta$有：

$$|S-s|<\varepsilon，即 \lim_{\lambda(\Delta)\to 0} S=L=I=\lim_{\lambda(\Delta)\to 0} s=I。$$

即 $\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$。其中$\omega_i=M_i-m_i$称为$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅。

二、（可积准则Ⅱ）$f(x)\in R[a,b]\Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0$及$\forall \sigma>0$，$\exists \delta(\varepsilon,\sigma)>0$，对于满足$\lambda(\Delta)<\delta$的任何分法$\Delta$，使振幅$\omega_i(\Delta)\geqslant\varepsilon$。所对应的子区间$\Delta x_i$的长度之和

$$\sum_{i'}\Delta x_i'<\sigma$$

由以上两个判断函数可积的充要条件很容易得到以下结果：

1．$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$f\in R[a,b]$。

2．$f(x)$在$[a,b]$上单调有界，则$f\in R[a,b]$。

3．$f(x)$在$[a,b]$仅有有限个第一类间断点，则
$f\in R[a,b]$。

定积分存在的判别准则是定积分理论的重要部分，也是学生难以掌握的内容，原因是由于定积分定义中有两个难以处理的问题，一是对于区间$[a,b]$的任意分法Δ，一是每一子区间$[x_{i-1},x_i]$上点ξ_i的任意取法，因此在判定定积分存在

时，对于有界函数引出达布大和和小和的概念，而这两个概念只和分法Δ有关与ξ的取法无关，由此入手得到著名的达布定理，达布定理告诉我们大和和小和当$\lambda(\Delta)\to 0$时，永远有确定的极限——它的下或上确界L或l，我们把L或l叫做f在$[a,b]$上的上或下积分，有了达布定理，要想求L或l的值，在分法上可以通过任何一种方便的方法。例如，对于函数$y=x^2$，$x\in[0,1]$，可用等分的方法得到大和和小和分别为

$$S_n(\Delta)=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

$$s_n(\Delta)=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})-\frac{1}{n}$$

由此得到：$L=l=\frac{1}{3}$。

一般地说，对于上述函数可积的充要条件Ⅰ中，存在$\delta>0$，对于$\lambda(\Delta)<\delta$的任意分法Δ，只要找到一种分法，就能保证函数可积，根据达布定理这个目的是可以达到的，先讨论必要条件。

若$f\in R[a,b]\Rightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，存在满足$\lambda(\Delta')<\delta$的$\Delta'$，使得

$$S(\Delta')-s(\Delta')<\varepsilon.$$

证 因为$f\in R[a,b]$，设$I=\int_a^b f(x)dx$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta(\varepsilon)>0$，对于满足$\lambda(\Delta)<\delta$的任意分法$\Delta$与任意取法$\xi$有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{1}$$

$$I-\frac{\varepsilon}{4}<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<+I+\frac{\varepsilon}{4}.$$

$$S(\Delta)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i.$$

可以知道：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \xi_i'\in\Delta x_i$，使得

$$M_i(\Delta)-\frac{\varepsilon}{4(b-a)}<f(\xi_i')\leqslant M_i(\Delta)$$

由此知道对于任意分法Δ：$\lambda(\Delta)<\delta$时有：

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i')\Delta x_i-S(\Delta)\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{2}$$

认为ξ_i'是ξ_i时，由(1)(2)两式知道：$\forall\Delta$: $\lambda(\Delta)<\delta$，

有 $|S-I|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

同理有 $|s(\Delta)-I|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是$\forall\varepsilon>0$，取满足$\lambda(\Delta')<\delta$的Δ'，则有

$$S(\Delta')-s(\Delta')<\varepsilon.$$

再讨论充分条件：

若$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，存在满足$\lambda(\Delta')<\delta$ $[a,b]$的一个分法Δ'，使得$|S(\Delta')-s(\Delta')|<\varepsilon$，则$f\in R[a,b]$.

证 已知$\forall\varepsilon>0$，$\exists\ \Delta'$，使得$S(\Delta')-s(\Delta')<\varepsilon$。又$\forall\Delta$，有 $s(\Delta)\leqslant l\leqslant L\leqslant S(\Delta)$，再由上述条件有

$$0\leqslant L-l\leqslant S(\Delta')-s(\Delta')<\varepsilon.$$

令$\varepsilon\to0$，得到$L=l=I$.

由达布定理及$L=l=I$知道

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\Delta$：$\lambda(\Delta)<\delta$，有$S(\Delta)-s(\Delta)<\varepsilon$。

因为对任意分法Δ及任意取法ξ都有

$$s(\Delta)\leqslant l=I=L\leqslant S(\Delta)$$

$$s(\Delta)\leqslant\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant S(\Delta)$$

故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\Delta$：$\lambda(\Delta)<\delta$，$\forall\xi$，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|\leqslant S(\Delta)-s(\Delta)<\varepsilon.$$

即 $$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=I\text{ 存在。}$$

由上面证明得到下面的定理：

定理（可积准则Ⅱ）：有界函数$f\in R[a,b]\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在分法$\Delta'$，使得

$$|S(\Delta')-s(\Delta')|<\varepsilon.$$

可积准则Ⅰ虽然在使用上并不方便，它刻划了函数可积的另一特征——$L=l$，因此可用它作为函数可积的定义来建立黎曼积分的理论，而可积准则Ⅱ是判断函数可积性的有力而方便的工具，注意在证明条件的充分性时达布定理起着重要的作用。

在黎曼积分问题中，只要$\lambda(\Delta)\to 0$，永远有

$$\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}S(\Delta)=L,\qquad\lim_{\lambda(\Delta)\to 0}s(\Delta)=l.$$

可积的充要条件是$L=l$，此时$I=\int_a^b f(x)dx$，即L、l的共

同值。

可见，从实质上说，分法不是关键，因上述极限可以通过随便怎样的无限分细得到，如果$L>l$，则不可积，此时可以通过点的取法ξ而使积分和取L与l之间的任何值为极限。

在这样理解下，$L=l$而$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0$（准则Ⅰ）揭示了可积的最根本特征。在证明通常可积函数的可积性中，准则Ⅰ没有多少不便之处。

判断函数的可积性是定积分理论的主要内容，但是无论从概念和证明方法上都是比较复杂的，尽管如此，还是应该要求读者掌握几个基本概念和证明方法，下面提供几个参考题：

一、 1. 定积分定义。

2. 什么是$f(x)$在$[a,b]$上的黎曼和、大和、小和、上积分和下积分。

3. 为什么讨论定积分时，一开始就限制“有界函数”。

上面问题要求读者能够正确地回答。

二、 1. 达布定理的条件、结论及证明的步骤。

2. 达布定理在定积分理论中，揭示了哪些深刻的性质。

三、定理：$f(x)$在$[a,b]$连续，则$f(x)$在$[a,b]$可积。

1. 上面定理改为开区间(a,b)，定理的结论成立吗？

2. 在证明上定理时，用到闭区间上连续函数哪些性质？

3. 在问题1中条件如何修改使定理的结论成立？

应将问题1中条件改为，在开区间(a,b)上的有界函数，就可保证f在(a,b)可积。请读者说明理由，因此，开闭是次要的问题，主要是函数是否有界。

例1　设$f(x)\in R[a,b]$且$f(x)\geqslant m>0$，$x\in[a,b]$，试证：$\frac{1}{f(x)}\in R[a,b]$。

证　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对于满足$\lambda(\Delta)<\delta$的任意分法Δ，有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}w_i\Delta x_i\right|<\varepsilon.$$

其中$w_i(\Delta)=\sup\{|f(x')-f(x'')|\}$，对一切$x'$，$x''\in\Delta x_i$

设　$w_i'(\Delta)=\sup\left\{\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|\right\}$，$x'$，$x''\in\Delta x_i$。

$$\left|\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right|=\frac{|f(x'')-f(x')|}{|f(x')f(x'')|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|f(x')-f(x'')|}{m^2}$$

即　$w_i'(\Delta)\leqslant\frac{|f(x'')-f(x')|}{m^2}$

则有　$\left|\sum_{i=1}^{n}w_i'(\Delta)\Delta x_i\right|\leqslant\left|\frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{n}w_i(\Delta)\Delta x_i\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{m^2}$。

$\therefore$　$\frac{1}{f(x)}\in R[a,b]$。

注：若将条件"$f(x)\geqslant m>0$"改为"$f(x)>0$"，则结论是否仍成立？

例 2 证明函数$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-[\frac{1}{x}], & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$

在$[0,1]$可积。

下面两种证法，哪种是正确的？哪种是错误的？错在何处？

证法 1 在$[0,1]$上$f(x)$有可数个间断点（无穷多个），且均为第一类间断点；间断点为$x_i=\frac{1}{i}$，$(i=1,2,\cdots n)$，对于任意给定$\varepsilon>0$，我们将$[0,1]$分为$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$，$[\frac{\varepsilon}{2},1]$两部分，在$[\frac{\varepsilon}{2},1]$上，$f(x)$仅有有限个间断点，且$f(x)$有界，则$f(x)$在$[\frac{\varepsilon}{2},1]$上可积。在$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$上，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$。对于任意分法$\Delta$有$\sum\limits_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}}w_i\Delta x_i\leqslant 1\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$。所以$f(x)$在$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$上也可积。

对于分法Δ，保留分点$\frac{\varepsilon}{2}$，当$\lambda(\Delta)\to 0$时，

$\because$ $f(x)$在$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$可积，$\therefore$ $\sum\limits_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}}w_i\Delta x_i\to 0$。

$f(x)$在$[\frac{\varepsilon}{2},1]$可积， $\therefore$ $\sum\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} w_i\Delta x_i \to 0$。

故 $\sum\limits_{0}^{1} w_i\Delta x_i = \sum\limits_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i\Delta x_i + \sum\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} w_i\Delta x_i \to 0$。

$\therefore$ $f(x)$在$[0,1]$上可积。

证法 2 对于任意给定的$\varepsilon>0$，将$[0,1]$分为$[0, \frac{\varepsilon}{2}]$，$[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$两部分。

显然$f(x)$在$[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$上只有有限个第一类间断点，且$f(x)$有界，所以$f(x)$在$[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$可积。

$\therefore$ $\forall \frac{\varepsilon}{2}>0$，$\exists \eta>0$，使对$[\frac{\varepsilon}{2},1]$的任何分法$\Delta'$，只要$\lambda(\Delta')<\eta$，有

$$\sum_{i'} w_i' \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

显然若$[\alpha,\beta] \subset [\frac{\varepsilon}{2}, 1]$，则对于$[\alpha,\beta]$的任意分法，只要

$\max|\Delta x_i|<\eta$，也有$\sum\limits_{i'} w_{i'} \Delta x_{i'} < \frac{\varepsilon}{2}$。

令 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \eta\right\}$。

设　$0=x_0<x_1<\cdots\cdots<x_{i_0}<x_{i_0+1}<\cdots\cdots<x_{n-1}=1$

是〔0，1〕的满足$\max|\Delta' x_i|<\delta$的任一分法，设$x_{i_0}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$

$<x_{i_0+1}$，则

$$\sum_{i=i_0+1}^{n-1} w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\sum_{i_0=0}^{i_0} w_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=0}^{i_0}\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}.$$

同时有$\sum\limits_{i=i_0}^{i_0+1} w_i\Delta x_i\leqslant(x_{i_0+1}-x_{i_0})<\delta<\frac{\varepsilon}{2}.$

$$\therefore\quad \sum_{i=0}^{n-1} w_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{i_0} w_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0}^{i_0+1} w_i\Delta x_i+\sum_{i=i_0+1}^{n-1} w_i\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{3\varepsilon}{2}.$$

$$\therefore\quad \lim_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} w_i\Delta x_i=0.$$

$\therefore\quad f(x)\in R[0,1]$.

证法1是错误的，其错误只在没有指出对于任给的$\varepsilon>0$，存在符合要求的$\eta>0$，而简单地由$\sum\limits_{i=0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i\Delta x_i<$固定

的$\frac{\varepsilon}{2}$，判断f在$[0,\frac{\varepsilon}{2}]$的可积性。

下面是正确的证法：

$\forall\varepsilon>0$，f在$[\frac{\varepsilon}{2},1]$可积，故$\exists\eta>0$，使对$[\frac{\varepsilon}{2},1]$的任何分法$\Delta'$，只要$\lambda(\Delta')<\eta$，就有

$$\sum_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} w_i' \Delta x_i' < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对$[0,1]$作分法Δ，使$\frac{\varepsilon}{2}$为一分点，并使$\lambda(\Delta)<\eta$，

$$\text{则}\quad \sum_{0}^{1} w_i \Delta x_i = \sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i \Delta x_i + \sum_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} w_i \Delta x_i$$

$$< \sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i \Delta x_i + \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因$0\leqslant w_i\leqslant 1$，故$\sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i \Delta x_i \leqslant \sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{2}$，可见当$\lambda(\Delta)<\eta$时，

$$\sum_{0}^{1} w_i \Delta x_i < \varepsilon$$

故f在$[0,1]$可积。

证法1虽是错误的，但已初步体现了达到目的的思路。

证法 2 是正确的，在证明中取 x_{i_0} 与 x_{i_0+1} 是为了保证证明的结果不依赖于分法的特殊性，其实这是多余的，因为由达布定理，$\lim\limits_{\lambda(\Delta)\to 0}\sum\limits_{i=0}^{n-1} w_i\Delta x_i$ 对于有界函数永远存在唯一，问题只在这极限是否为零（可积或不可积），所以，取 $\frac{\varepsilon}{2}$ 作分点，使分法特殊化不会影响极限值，它和证法 1 的思想是一致的，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，也是将〔0,1〕分成两个子区间 $[0,\frac{\varepsilon}{2}]$ $[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$，在 $[\frac{\varepsilon}{2}, 1]$ 上函数可积，

$\therefore$ $\sum\limits_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，而在 $[0, \frac{\varepsilon}{2}]$ 上函数 f 在 0 点近旁有无穷多个第一类间断点，因此振幅 w 不能任意小，但我们可以取区间长度 $\frac{\varepsilon}{2}$ 足够小，使 $\sum\limits_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，这样就能使

$$\sum_{0}^{1} w_i\Delta x_i=\sum_{0}^{\frac{\varepsilon}{2}} w_i\Delta x_i+\sum_{\frac{\varepsilon}{2}}^{1} w_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

由此就证明了 $f\in R[0,1]$。

此处这类问题有一个共同原则，就是"挖去间断点"，而挖去区间的长度可以任意小，这样证明可积的方法是很重要的，要求读者掌握这样处理这类问题的原则，读者可证明

下面的例题。

例 3 证明函数 $f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$ 在 $[0,1]$ 可积。

例 4 证明：若 $f\in R[a,b]$，则 $|f|\in R[a,b]$。

证明从略：

类似例 4 的问题，可证以下命题：

(1) $f(x)\in R[a,b]\Rightarrow f^2(x)\in R[a,b]$，

(2) $|f(x)|\in R[a,b]\Rightarrow f^2(x)\in R[a,b]$

(3) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 不可积，$|f(x)|$，$f^2(x)$ 在 $[a,b]$ 可积吗？

(4) 若 $f(x)+g(x)\in R[a,b]$，$f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 可积吗？

例 5 若 $f(x)\in R[A,B]$，证明

$\lim\limits_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0$，其中 $A<a<b<B$。

证 $\because$ $f(x)\in R[a,b]$，$\therefore$ $|f(x)|<M$，$(A\leqslant x\leqslant B)$（$M$ 为常数）

取特殊分法将 $[a,b]$ n 等分，各子区间长 $\delta=\frac{b-a}{n}$，

则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\delta=0$。 (1)

取 $|h|<\delta$ 考虑

$$\int_{a+(i-1)\delta}^{a+i\delta}|f(x+h)-f(x)|dx,\ (i=1,2,\cdots,n).$$

不妨设 $h>0$，（$h<0$ 时可同样证明）

(1) 若 x，$x+h$ 都在第 i 个小区间（$i=1,2,\cdots,n-1$），

则

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant w_i.$$

(2) 若 x 在第 i 个区间，$x+h$ 在第 $i+1$ 个小区间内（若$h<0$，则$x+h$在第$i-1$个小区间），则

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|f(x+h)-f(x')|+|f(x')-f(x)|\leqslant w_i+w_{i+1}$$ 其中$x'=i\delta$，即x'为第 i 个小区间的右端点，所以对于$i=1,2,\cdots,n-1$有.

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant w_i+w_{i+1},\quad x\in[x_{i-1},x_i].$$

对于$i=n$，有

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant|f(x+h)|+|f(x)|<2M$$

所以有

$$\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx<\sum_{i=1}^{n-1}(w_i+w_{i+1})\delta+\alpha M\delta.$$

由（1）式可知当$n\to\infty$时，即$\delta\to 0$时，有$|h|\to 0$，此时

$$\sum_{i=1}^{n-1}w_i\delta\to 0,\qquad \sum_{i=1}^{n-1}w_{i+1}\delta\to 0,\qquad aM\delta\to 0.$$

$$\therefore\qquad \lim_{h\to 0}\int_a^b|f(x+h)-f(x)|dx=0.$$

例6 试证：如果$f(x)$在$[a,b]$连续，且对于一切$x\in[a,b]$，$f(x)\geqslant 0$，同时至少有一点$\xi\in[a,b]$，$f(\xi)>0$，

$$\text{则}\quad\int_a^b f(x)dx>0.$$

对以下三种方法要求读者指出哪种证法是正确的，哪种证法是错误的，错在何处？

证法 1 由于$f(\xi)>0$，对于任意分法Δ，取$\xi\in[a,

$b]$，则 ξ 落在某个 Δx_i 上 $f(\xi)\Delta x_i>0$。$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i>0$。

于是得到
$$\int_a^b f(x)\,dx>0.$$

证法 2 由于 f 在 ξ 点连续，$\therefore \exists\ \delta>0$，
当 $|x-\delta|<\xi$ 时，

$$f(x)>\frac{1}{2}f(\xi)>0.\ \text{于是}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant\frac{1}{2}\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(\xi)\,dx=\delta f(\xi)>0.$$

$$\therefore\qquad \int_a^b f(x)\,dx>0.$$

证法 3 $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f(x)\in R[a,b]$ 于是存在 $[a,b]$ 的一个分法 Δ'，使得对于某个区间 $[x_{i-1},x_i]$ 的所有 x 有 $f(x)>\dfrac{f(\xi)}{2}$，于是有

$$S(\Delta')\geqslant f(\xi)\frac{(x_i-x_{i-1})}{2}>0.$$

由 $\int_a^b f(x)\,dx=\inf\{S(\Delta)\}=I>0$。

证法 2 和证法 3 都是正确的，而证法 1 是错误的，因为

$\sum_{i=1}^{n} f(\xi)\Delta x_i>0$ 不能保证 $\int_a^b f(x)\,dx>0$，只能说明

$\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$。

本节选的例题较多，教师可以根据情况选择所必须的内容。

第九章　数项级数

§1　预备知识：上极限和下极限

本节内容本来属于极限论的范畴，由于这是达朗贝尔和柯西判别法的一般形式的理论根据，作为数项级数的预备知识，才在这里介绍这两个概念。借此机会，也在分析学方面给学生一些处理问题的训练。

1．叙述有界数列$\{a_n\}$的上、下极限的定义：

定义1　i）如$\{a_n\}$有上界，就说$\lim\limits_{k\to\infty}(\sup\limits_{n>k}\{a_n\})=H$是$\{a_n\}$的上极限，记作$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$。

ii）如$\{a_n\}$无上界

则　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=+\infty$。

定义2　i）如$\{a_n\}$有界，就说$\lim\limits_{k\to\infty}(\inf\limits_{n>k}\{a_n\})=h$是$\{a_n\}$的下极限，记作$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$

ii）如$\{a_n\}$无下界。

则　$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=-\infty$。

注：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$可以是$-\infty$，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$可以是$+\infty$。

例如$a_n=n$。由定义1，ii）知

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=+\infty.$$

由定义 2，i)知

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n=+\infty.$$

2．对于任何数列$\{a_n\}$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$及$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$总存在，且

$$-\infty\leqslant\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\leqslant+\infty.$$

根据上、下极限的不同情况，可以推断数列$\{a_n\}$的几个性质：

i）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=+\infty\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_n=+\infty.$

$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=-\infty\Longleftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty.$

ii）$-\infty<\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n<+\infty\Longleftrightarrow\{a_n\}$ 收敛。

定理1　设

$$H=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$$

则

i）当H为有限数时，对于H的任何ε—邻域$(H-\varepsilon,\ H+\varepsilon)$，在数列$\{a_n\}$中有无穷多个项属于这个邻域，而只有有限多个项大于$H+\varepsilon$。

ii）当$H=+\infty$时，对于任何数$N>0$，在$\{a_n\}$中必有无穷多个项大于N。

定理2　设

$$h=\underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

则

i）当h为有限数时，对于h的任何ε—邻域$(h-\varepsilon, h+\varepsilon)$在数列$\{a_n\}$中有无穷多个项属于这个邻域，只有有限多个项小于$h-\varepsilon$。

ii）当$h=-\infty$时，对任何数$N>0$，在数列$\{a_n\}$中有无穷多个项小于$-N$。

定理3 设有限数H为$\{a_n\}$的上极限，那么H必是$\{a_n\}$中所有收敛子列的极限值之最大者。

设有限数h为$\{a_n\}$的下极限，那么h必是$\{a_n\}$中所有收敛子列中的极限值之最小者。

下面举几个关于上、下极限的性质，作为例题，都用定义证明。

例1 证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$

证法 1

1）若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都无上界，则按定义，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=+\infty$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=+\infty$。

由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant+\infty$永远成立。

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$。

2）若$\{x_n\}$有上界，$\{y_n\}$无上界，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=H\text{ 有限，}\quad\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=+\infty。$$

故 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=+\infty$。

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant+\infty。$$

所以 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$

3）若$\{x_n\}$，$\{y_n\}$都有上界，则对于一切$>k$的λ

$$x_\lambda\leqslant\sup_{n>k}\{x_n\},\qquad y_\lambda\leqslant\sup_{n>k}\{y_n\},$$

$\therefore$ $x_\lambda+y_\lambda\leqslant\sup\limits_{n>k}\{x_n\}+\sup\limits_{n>k}\{y_n\}$.

$$\sup_{n>k}\{x_n+y_n\}\leqslant\sup_{n>k}\{x_n\}+\sup_{n>k}\{y_n\}$$

$\therefore$ $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n>k}\{x_n+y_n\}\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{n>k}\{x_n\}+\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{n>k}\{y_n\}$

即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

注：如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=-\infty$，为使关系式右边加法运算有意义，则须$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\neq+\infty$，同样，如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=+\infty$.则须$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n\neq-\infty$，上面的证法是用定义证明的。

证法 2　用定理 1，当$a=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n$为有限数时，对于$a$的任何$\varepsilon$—邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，在$\{x_n\}$中有有限个$x_n>a+\varepsilon$，假定说有$k_\varepsilon$个。

同样如果$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=\beta$，则仅有有限个$y_n>\beta+\varepsilon$，假定说有$k_\varepsilon'$个，于是在$\{x_n+y_n\}$中最多有$k_\varepsilon+k_\varepsilon'$个项$>\alpha+\beta+\alpha\varepsilon$.

$\therefore$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\alpha+\beta+\alpha\varepsilon$.

由$\varepsilon>0$的任意性，得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

证法3 用定理3证明不等式的成立。

已知 $\{x_n+y_n\}$，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都有有限的上极限，所以 $\{x_n+y_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}+y_{n_k}\}\to\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$。

$$\{x_{n_k}\}\text{有子列}\{x_{n''_k}\}\to\alpha'\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n.$$

$$\{y_{n_k}\}\text{有子列}\{y_{n''_k}\}\to\beta'\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

显然有 $\{x_{n''_k}\}\to\alpha'\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.

$$x_{n''_k}+y_{n''_k}\to\alpha'+\beta'\leqslant\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

但 $x_{n''_k}+y_{n''_k}\to\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)$.

$\therefore$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\alpha'+\beta'\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

例2 设 $x_n\geqslant0$，$y_n\geqslant0$，证明：

（1）$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot y_n\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

（2）$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot y_n\geqslant\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$.

证明从略。

例3 若 $x_n>0$（或 $x_n<0$），$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\neq0$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n}.$$

证法1 用上（下）极限定义证明：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=\lim_{k\to\infty}\sup_{n\geqslant k}\left\{\frac{1}{x_n}\right\}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\inf\limits_{n\geqslant k}\{x_n\}}=\frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n}.$$

其中 $\sup\limits_{n>k}\left\{\frac{1}{x_n}\right\}=\frac{1}{\inf\limits_{n>k}\{x_n\}}$ 可利用确界的定义证明。

设 $\inf\limits_{n>k}\{x_n\}=a$。　　$(a>0)$

∴　　(1) $\forall x_i\in\{x_n\}$，$x_i\geqslant a$，　$(i>k)$

　　(2) $\forall\varepsilon>0$，$\exists x_0\in\{x_n\}$，$x_0<a+\varepsilon$。

要证　　$\sup\limits_{n>k}\left\{\frac{1}{x_n}\right\}=\frac{1}{a}$。

由（1）对于任意 $i>k$，$\frac{1}{x_i}\leqslant\frac{1}{a}$。

由（2）$\forall\varepsilon>0$，取 $\varepsilon_0=\frac{a^2\varepsilon}{1-a\varepsilon}$，$\exists x_0\in\{x_n\}$，使得

$x_0<a+\varepsilon_0$。于是得到　$\frac{1}{x_0}>\frac{1}{a+\varepsilon_0}=\frac{1}{a}-\varepsilon$。

∴　　$\sup\limits_{n>k}\left\{\frac{1}{x_n}\right\}=\frac{1}{\inf\limits_{n>k}\{x_n\}}$。

证法2　设 $\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$(a>0)$。

根据本节定理2，对于$\forall\varepsilon>0$，至多只有有限多个 $x_n<a-\varepsilon$，而有无穷多个 $x_n>a+\varepsilon$，因此至多只有有限多个 $\frac{1}{x_n}>\frac{1}{a-\varepsilon}=\frac{1}{a}+\varepsilon_1$，而有无穷多个$\frac{1}{x_n}>\frac{1}{a+\varepsilon}=\frac{1}{a}-\varepsilon_2$，由于$\varepsilon$为任意小的正数，所以$\varepsilon_1$，$\varepsilon_2$也可以任意小，有

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{a}=\frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n}.$$

§2　数项级数的判敛法

研究级数的收敛问题，实质上就是研究部分和数列的收敛问题，这就要求读者能够用有关数列的知识来研究级数，对于级数的判敛法要记得熟，用得活。

1．关于数项级数的判敛法总结如下：

给定数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$。

（1）当$a_n\nrightarrow 0$，$(n\to\infty)$时，（1）发散。

（2）柯西收敛原理。

（3）正项级数的比较判别法。

（4）正项级数的柯西判别法，达朗贝尔判别法，柯西积分判别法。

2．在运用上述判敛法时，要分析级数的特点，选用适当的方法，举例如下：

注：当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛时，记作$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$，发散时记作

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty。$$

例1　讨论下列级数的敛散性：

1）　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

解　$\because$　$\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}\geqslant\frac{1}{\ln n}\geqslant\frac{1}{n}$，（当$n\geqslant N$时）

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

∴ $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}=+\infty.$$

2） $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2(-1)^n}{n^2}.$$

解 ∵ $$0<\frac{3+2(-1)^n}{n^2}\leqslant\frac{5}{n^2}.$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{n^2}<+\infty,$$

∴ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3+2(-1)^n}{n^2}<+\infty.$$

3） $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}$，$(x>0)$．

解 若 $0<x<1$，则 $\frac{1}{1+x^n}\to 1$，$(n\to\infty)$，

∴ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}=+\infty$$

若 $x=1$，则 $\frac{1}{1+x^n}=\frac{1}{2}$，

∴ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}=+\infty.$$

若 $x>1$，则 $\frac{1}{1+x^n}<\left(\frac{1}{x}\right)^n$。

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^n}<+\infty。$$

4） $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}。$$

解从略。

5） $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}。$$

解从略。

6） $$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)},\quad x\geqslant 0。$$

解法1 当 $x=0$ 时，显然 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$。

当 $0<x<1$，$a_n<x^n$，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$。

当 $x=1$，$a_n=\frac{1}{2^n}$， ∴ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$。

当 $x>1$，$$a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{n-1})(1+x^n)}$$

$$<\frac{x^n}{(1+x^{n-1})(1+x^n)}<\frac{x^n}{x^{n-1}x^n}=\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}。$$

▲ $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

解法 2 $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)(1+x^{n+1})} \cdot \frac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{x^n}$$

$$= \frac{x}{1+x^{n+1}}$$

当 $0<x<1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to x$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

当 $x=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

当 $x>1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 0$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

当 $x=0$，显然 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

解法 3 $$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x}{\sqrt[n]{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}}.$$

当 $0 \leqslant x < 1$，$\sqrt[n]{a_n} \leqslant x$，$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

当 $x=1$，解法 1 已证。

当 $x>1$时，$\sqrt[n]{a_n} \leqslant \frac{x}{\sqrt[n]{x^{1+2+\cdots+n}}} = \frac{1}{x^{\frac{n-1}{2}}} \to 0$.

故 $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty.$$

7） $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}.$$

8） $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

解从略。

9） $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + a_q}.$$

解 $a_n \sim \frac{n^p}{n^q} = \frac{1}{n^{q-p}}$.

∴当 $q > p+1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$.

当 $q \leqslant p+1$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$.

10） $$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p \ln \frac{n-1}{n+1}.$$

解 因为 $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})^p = \frac{1}{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^p} \sim \frac{1}{(2\sqrt{n})^p}$

$$= \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^{p/2}}$$

$$\ln\frac{n-1}{n+1}=\ln\left(1+\frac{-2}{n+1}\right)\sim\frac{-2}{n+1}\sim\frac{-2}{n}.$$

$\therefore\quad a_n\sim-\frac{1}{2^{p-1}}\cdot\frac{1}{n^{1+\frac{p}{2}}}.$

$\therefore$ 当 $1+\frac{p}{2}>1$，即 $p>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n<+\infty$.

当$1+\frac{p}{2}\leqslant1$，即 $p\leqslant0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=+\infty$.

例2 回答以下几个问题：

1）叙述数列$\{S_n\}$收敛的柯西准则；

2）叙述级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛的柯西准则。

答 1）$\{S_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，只要一切自然数$n$与$m\geqslant N$时，必然$|S_n-S_m|<\varepsilon$.

2）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，

只要$n>N$对于任何自然数p必然

$$|S_{n+p}-S_n|=|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}|<\varepsilon.$$

3）用柯西准则判断数列的敛散性。

i）用柯西准则证明数列 $S_n=\frac{1}{n}$收敛。

证 $\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]>0$，便能在自然数$m$、$n>N$，

且 $m>n$ 下保证

$$|S_m-S_n|=\left|\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right|=\frac{m-n}{mn}=\frac{1-\frac{n}{m}}{n}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

于是问题得证。

ii）用柯西准则证明数列 $S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ 收敛。

证 设 m，n 与 p 是任何自然数，$m=n+p$，则

$$|S_n-S_m|=\left|\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}\right|$$

$$=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$\leqslant\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

∴ $\forall \varepsilon>0, \exists N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]>0$，对于一切自然数 $m, n>N$ 时

$$|S_n-S_m|<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

∴ $\{S_n\}$ 收敛。

4）如何用柯西准则判断数列发散？

数列$\{S_n\}$不满足柯西准则，则$\{S_n\}$发散，也就是$\exists \varepsilon_0>0$，对于 $\forall N>0$，$\exists n,m>N$，使得

$$|S_n-S_m|\geqslant\varepsilon_0.$$

例如证明数列 $S_n=1+(-1)^n$ 发散。

证 $\exists \varepsilon_0=1$，$\forall N>0$，取 $n=2N$，$m=2N+1$，则 $n,m>N$，这时 $|S_n-S_m|=|1+(-1)^{2N}-(1+(-1)^{2N+1})|$

$$=2>\varepsilon_0.$$

∴ $\{S_n\}$发散。

5）叙述 $f(x)$ 在$x=a$ 点极限存在的柯西准则。

例3 a）若$a_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，那么$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，其逆如何？

b）又若$a_n\geqslant0$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛且 $\lim_{n\to\infty} na_n=a$，则 $a=0$。

证明a） ∵ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛， ∴ $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $0\leqslant a_n<1$，故 $a_n^2<a_n$，由比较判敛法知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛。

其逆不一定成立，例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

证明b)（证法 1）若 $a\neq 0$，∵ $a_n\geqslant 0$，∴ $a>0$，

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=a>0$，据比较判敛法的极限形式，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，得出与已知条件矛盾的结果。∴ $a=0$。

（证法 2）∵ $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=a$。

$\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，有 $|na_n-a|<\varepsilon$，

即 $\frac{a-\varepsilon}{n}<a_n<\frac{a+\varepsilon}{n}$

取 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0$。

若 $a\neq 0$，有 $\frac{a-\varepsilon}{n}=\frac{a}{2n}<a_n$，由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a}{2n}$ 发散，得知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，与已知矛盾，∴ $a=0$。

例4　以下的讨论有何错误。

讨论以下级数的收敛性

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$；　　　2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(n+1)]^n}$；

解：1. $\because$ $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}}<\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+3n}}$

$$=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3}}=q<1.$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<+\infty.$$

2. $\because \sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{\ln(1+n)}=q<1.$

上面两个例题的错误是：在比值和极限值判敛法中的q是个常数，而此处的q是n的函数，在这点上读者往往不注意。

§3　任意项级数敛散的判别

要求将下面的问题搞清楚：

1. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛与条件收敛的概念。

2. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$是否收敛？

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛？

对于正项级数有比较判敛法能判断许多级数的收敛和发散，对于任意项级数，有几个判定收敛和发散的方法，有几个

判定收敛的充分条件（莱布尼兹定理，阿贝尔和狄立克莱判别法），但不能判定它发散．用以下几个方法可以判定任意项级数发散．

（1）$a_n \nrightarrow 0$。

（2）不满足柯西收敛原理。

（3）若 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to l > 1$。或 $\sqrt[n]{|a_n|} \to l > 1$

（则 $|a_n| \nrightarrow 0$）．

（4）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n + w_n)$ 时，若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 其一发散另一收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

判断以下各级数是否收敛，若系收敛再分辨它是绝对收敛还是条件收敛：

例1 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+10}\right)^n$。

证 这是交错级数，先考察它是否绝对收敛。

∵ $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{2n+100}{3n+10} \to \frac{2}{3} < 1$，∴ $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| < +\infty$。

例2 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$。

证 容易证明 $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ 发散。

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1}$$

$$=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}+\frac{1}{n-1}.$$

易知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}$收敛，又$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散。

∴ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$发散。

例3 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^p}$ $(0<x<\pi)$。

证 当$p\leqslant 0$时，级数显然发散。

当$p>0$时

i) $p>1$，由$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$，∴原级数绝对收敛。

ii) $0<p\leqslant 1$，设$a_n=\frac{1}{n^p}$，$b_n=\cos nx$，由狄立克莱判别法知道原级数收敛，因为$|\cos nx|\leqslant 1$，所以

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|\geqslant\frac{\cos^2 nx}{n^p}=\frac{1}{2n^p}+\frac{\cos 2nx}{2n^p},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nx}{n^p}$收敛，

∴ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right|$发散。

6. 当 $0<p\leqslant 1$ 时，原级数条件收敛。

例4 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^{n}}{n^{p}}\right]$。

读者自己证明级数当 $\frac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛。当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时发散，当 $p>1$ 时绝对收敛。

第十章　广义积分

§1　无穷限广义积分敛散的判别

基本要求和数项级数相同，主要要求学生熟练运用各种判敛法。

例1　判断下列积分的收敛性，如收敛，求积分值。（解法从略）

（1）　$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$；（收敛于1）

（2）　$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2}dx$；（发散）

（3）　$\int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x \frac{dx}{1+x^2}$；（收敛于$\frac{\pi^2}{8}$）

（4）　$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2-x}$；（收敛于$\ln 2$）

（5）　$\int_0^{+\infty} e^{-x}\sin x dx$；（收敛于$\frac{1}{2}$）

（6）　$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.（发散）

例2 用比较判敛法，判断以下无穷积分的敛散性。

（1） $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$；（提示：$0<\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}<\frac{1}{x^2}$，积分收敛）

（2） $\int_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}}$，（提示：当 $x>2$ 时，$\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}>\frac{x}{\sqrt{x^4+x^4}}$，积分发散）

（3） $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x^4-1}}$；（提示：$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x^4-\frac{x^4}{2}}}$，积分收敛）

（4） $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)\ln x}$（提示：$\frac{1}{(x-1)\ln x}>\frac{1}{x\ln x}$，积分发散）

（5） $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}dx$。

（提示：$|f(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}\,(1+x)}\leqslant\frac{1}{x^{3/2}}\ (x>0)$，积分绝对收敛）

例3 判敛法：设在 $[a,+\infty)$，$f(x)\geqslant0$，且在任何有限区间 $[a,A]$ 上 f 可积。

1）如果存在 $s>1$，使 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^s f(x)=L$，

$(0\leqslant L<+\infty)$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 收敛。

2）如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=L$，$(0<L\leqslant+\infty)$，

则$\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$发散。

用上面判敛法，判断下面积分的敛散性。

（1） $\int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{4}}}$；

（2） $\int_{0}^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{1+x^{4}}}dx$；

（3） $\int_{0}^{+\infty} x^{2} e^{-\frac{x}{2}} dx$；

（4） $\int_{0}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{1+x^{4}}}$。

例！ 讨论以下积分的敛散性(若收敛，是绝对收敛还是条件收敛）。

（1） $\int_{0}^{+\infty} \frac{x^{2}+1}{x^{3}+2}\cos x dx$。

证 因为 $\left|\int_{0}^{A} \cos x dx\right| \leqslant 2$。

设 $g(x)=\frac{x^{2}+1}{x^{3}+2}$，$g'(x)=\frac{-x^{4}-3x^{2}+4}{(x^{3}+2)^{2}}<0, (x>1)$

∴ 当$x>1$时，$g(x)$单调下降，又$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{2}+1}{x^{3}+2}=0$。

根据狄里克莱判别法，知道原积分收敛，又

$$\frac{x^{2}+1}{x^{3}+2}|\cos x| \geqslant \frac{x^{2}+1}{x^{3}+2}\cos^{2} x=\frac{x^{2}+1}{2(x^{3}+2)}(1+\cos 2x)$$

$$=\frac{x^2+1}{2(x^3+2)}+\frac{x^2+1}{2(x^3+2)}\cos 2x$$

$$=F_1(x)+F_2(x)=F(x).$$

因为 $\int_0^{+\infty}F_1(x)dx$ 发散，$\int_0^{+\infty}F_2(x)dx$ 收敛，

$\therefore$ $\int_0^{+\infty}F(x)dx$发散。 $\therefore$ $\int_0^{+\infty}\frac{x^2+1}{x^3+2}|\cos x|dx$ 发散，

$\therefore$ 原积分条件收敛。

（2）$\int_1^{+\infty}e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\lambda}dx$，$(\lambda>0)$。

证 $\because$ $\left|\int_1^A e^{\sin x}\sin 2x dx\right|=\left|2\int_1^A e^{\sin x}\sin x\cos x dx\right|$

$$=\left|2\int_1^{\sin A}e^u u\, du\right|\leqslant 2.$$

而 $\frac{1}{x^\lambda}$单调下降 $(\lambda>0)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\lambda}=0$，

$\therefore$ 积分$\int_1^{+\infty}e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\lambda}dx$ 收敛。

又当$\lambda>1$时，$\left|e^{\sin x}\frac{\sin 2x}{x^\lambda}\right|\leqslant\frac{e}{x^\lambda}$.

$\therefore$ $\int_1^{+\infty}e^{\sin x}\frac{|\sin 2x|}{x^\lambda}dx$ 收敛，原积分绝对收敛。

当 $0<\lambda\leqslant 1$ 时，

$$\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^\lambda}>\frac{e^{-1}|\sin 2x|}{x^\lambda}\geqslant\frac{e^{-1}\sin^2 2x}{x^\lambda}=e^{-1}\frac{1-\cos 4x}{2x^\lambda}$$

故 $\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^\lambda}dx$发散。

故 原积分条件收敛。

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\lambda}dx$。

易证当 $\lambda>1$ 时，积分绝对收敛。

当 $0<\lambda\leqslant1$ 时，积分条件收敛。

当 $\lambda<0$ 时，讨论如下：设 $\alpha=-\lambda>0$。

$$\left|\int_{2k\pi-\frac{\pi}{2}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}x^\alpha\cos xdx\right|\geqslant\left|\int_{2k\pi-\frac{\pi}{2}}^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\cos xdx\right|=2.$$

∴ 原积分在 $\lambda\leqslant0$ 时发散。

注意：不能由“当 $x\to+\infty$，$x^\alpha\cos\nrightarrow0$”得出积分发散。这一点和数项级数不同，比较如下：

（1）若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$， ∴ 由 $a_n\nrightarrow0$，可推出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

（2）若 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛 $\nRightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$。

∴ $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq0$，不能推出 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散。

例如：$\int_0^{+\infty}\sin x^2dx$。

$\int_0^A\sin x^2dx\overset{设u=x^2}{=\!=\!=}\int_0^{A^2}\sin u\frac{du}{2\sqrt{u}}$，由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}du$ 收敛，

∴ 当 $A\to+\infty$ 时 $\int_0^A \sin x^2 dx$ 极限存在，∴ $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 收敛，但是 $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x^2$ 不存在。

即使 $f(x)\geqslant 0$，且 $f(x)$ 连续，也不能由 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛推出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

例如：

$$设 f(x)=\begin{cases} 1-n^2|x-n|, & n-\frac{1}{n^2}\leqslant x\leqslant n+\frac{1}{n^2},\ n=2,3,\cdots\cdots \\ 0, & n+\frac{1}{n^2}\leqslant x\leqslant (n+1)-\frac{1}{(n+1)^2}, n=2,3,\cdots\cdots \end{cases}$$

则 $f(x)$ 具有以下几个性质：

i) $f(x)\geqslant 0$。

ii) $f(x)$ 在 $\left[2-\frac{1}{4},\ +\infty\right)$ 连续，但非一致连续。

iii) $\int_0^{+\infty} f(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int_{n-\frac{1}{n^2}}^{n+\frac{1}{n^2}} f(x)dx=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{n^2}\cdot 1\right)\frac{1}{2}$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} 收敛。$$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$。

函数 $f(x)$ 的图形如下：



图 42

可是在一定条件下，可由$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，推出

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

定理 1 若$f(x)$在$[a,+\infty)$连续、单调且$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 设$f(x)$单调下降，则$f(x)$必定大于或等于零，否则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散。由于$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，根据柯西积分判敛法，知道$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$收敛。 $\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=0$，再由$f(x)$单调且$\geqslant 0$，就能推得$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

定理 2 若$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，则$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$。

证 若当$x\to+\infty$，$f(x)\nrightarrow 0$，则$\exists\ \varepsilon_0>0$，及$x_n\to+\infty$，使$|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$ $(n=1,2,\cdots)$，由于$f(x)$在$[a,+\infty)$一致连续，$\therefore$ 对于$\frac{\varepsilon_0}{2}>0$，$\exists\ \delta>0$，

当$|x-x''|<\delta$, $x,x''\in[a,+\infty)$

有$|f(x)-f(x'')|<\frac{\varepsilon_0}{2}$。

∴ 在每个$I_n=[x_n-\delta,x_n+\delta]$上有$|f(x)-f(x_n)|<\frac{\varepsilon_0}{2}$，

∴ 当$x\in I_n$时$|f(x)|\geqslant|f(x_n)|-|f(x)-f(x_n)|>\frac{\varepsilon_0}{2}$。

且$f(x)$在I_n上同号（因连续）。

$$\therefore\quad\left|\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta}f(x)dx\right|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\delta=\delta\varepsilon_0.$$

按照广义积分收敛的柯西收敛原理知道$\int_a^{+\infty}f(x)dx$发散，这是与假设条件矛盾的结果，　∴ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$。

另一证法：∵　$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续。

∴　$\forall\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，当$\forall x',x''\in[a,+\infty)$且$|x'-x''|<\delta$，有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$，又因为$\int_a^{+\infty}f(x)dx$收敛，

∴　$\exists\,A>0$，$\forall A',A''>A$有$\left|\int_{A'}^{A''}f(x)dx\right|\leqslant\delta\varepsilon$，∴　当$x>A$

时，$\left|f(\xi)\delta\right|=\left|\int_x^{x+\delta}f(x)dx\right|\leqslant\delta\varepsilon$，（某一$\xi\in(x,x+\delta)$）

∴ $|f(\xi)|<\varepsilon$。

又因为　$|x-\xi|<\delta$。

∴　$|f(x)-f(\xi)|<\varepsilon$。

$\therefore$ $|f(x)|\leqslant|f(x)-f(\xi)|+|f(\xi)|<2\varepsilon$.

$\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

定理3 若$f(x)$在$[a,+\infty)$上单调，$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，

则$\exists M>0$及$\Delta>0$，当$x>\Delta$时，$\left|f(x)\right|<\dfrac{M}{x}$.

证明 若$f(x)$单调下降，当x充分大时，必有$f(x)\geqslant0$，（否则$\int_a^{+\infty} f(x)dx$发散）若$f(x)$单调上升，当x充分大时，必有$f(x)\leqslant0$。总之$|f(x)|$单调下降。

以下只证明$f(x)$单调下降的情形：

因为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，$\therefore$ 对于$\varepsilon>0$，$\exists \overline{M}>0$，

当$x>\overline{M}$时，使

$$\int_{\overline{M}}^{x} f(x)dx<\varepsilon$$

既然$f(x)$单调下降必然

$$\int_{\overline{M}}^{x} f(x)dx\geqslant f(x)\int_{\overline{M}}^{x} dx=(x-\overline{M})f(x).$$

故

$$(x-\overline{M})f(x)<\varepsilon.$$

取$x>2\overline{M}=\Delta$，则得$\dfrac{x}{2}f(x)<(x-\overline{M})f(x)<\varepsilon$，即

$xf(x)<2\varepsilon=M$，或即$f(x)<\dfrac{M}{x}$.

证法 2 因为$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，∴ $\int_a^x f(x)dx$有界，即

$\exists M_1>0$，使 $\left|\int_a^x f(x)dx\right| \leqslant M_1$，$a \leqslant x < +\infty$。

由于$f(x)$单调下降，∴ $\int_a^x f(x)dx \geqslant f(x)(x-a)$

即

$$(x-a)f(x) \leqslant \int_a^x f(x)dx \leqslant M_1$$

∴ $$|f(x)| = f(x) \leqslant \frac{M_1}{x-a} < \frac{M_1}{\frac{x}{2}} = \frac{2M_1}{x} = \frac{M}{x}$$

当$x-a > \frac{x}{2}$时，即$x > 2a$时上面不等式成立。

§2 有限区间上无界函数的广义积分（又称瑕积分）敛散的判别

要求熟练运用瑕积分的敛散判别法，总结广义积分与常义积分的异同。

例1 讨论以下瑕积分的敛散性：（计算从略）

（1）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^2}}$；（积分收敛）

（2）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$；（积分收敛）

（3）$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)^5}}$；（积分发散）

（4）$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)}dx$；（积分收敛）

（5）$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^7}}$；（积分收敛）

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$；（当 $p<1$，$q<1$ 时，积分收敛）

（7）$\int_0^1 x^\mu \ln x dx$；（当$\mu>-1$时积分收敛，$\mu\leqslant-1$时积分发散）

（8）$\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}dx(n\geqslant0)$；（当$-1<m<-1+n$时积分收敛）

（9）$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$，（当 $p>1$，$r<1$ 或 $p=1$，$q>1$，$r<1$ 时积分收敛）

（10）$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+x^2}dx$．（积分收敛）

以上几个题要学生独立完成，可选几题作示范。

（5）$\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^7}}dx$。

解 原积分$=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^7}}dx+$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^7}}dx=I_1+I_2.$$

则 $x=0$ 为I_1 的瑕点。

$x=1$ 为I_2 的瑕点。

$$\lim_{x\to0^+}x^{\frac{3}{4}}\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)^7}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\frac{1}{4}}\ln^2 x}{\sqrt[3]{(1-x)^7}}=0.$$

$\therefore$ I_1 收敛。

$$\lim_{x\to1^-}(1-x)^{\frac{1}{3}}\frac{\ln^2[1-(1-x)]}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^2}=1,$$

$\therefore$ I_2 收敛。

因此原积分收敛。

(9) $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}$.

解 原积分$=\int_e^{e+1}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}+$

$$+\int_{e+1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p(\ln x)^q(\ln\ln x)^r}=I_1+I_2.$$

$x=e$ 是 I_1 的瑕点。

而

$$\ln\ln x=\ln\ln[e+(x-e)]=\ln\ln\left\{e\left[1+\frac{x-e}{e}\right]\right\}$$

$$=\ln\left\{\ln e+\ln\left[1+\frac{x-e}{e}\right]\right\}$$

$$=\ln\left\{1+\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)\right\}$$

$$\sim\ln\left(1+\frac{x-e}{e}\right)$$

$$\sim\frac{x-e}{e}.\quad(\text{当}x\to e\text{时})$$

∴ $(\ln\ln x)^r\sim\dfrac{(x-e)^r}{e^r}$

∴ I_1 当且仅当 $r<1$ 时收敛。

I_2 当且仅当 $p>1$ 或 $p=1$，$q>1$ 或 $p=q=1$，$r>1$ 时收敛。

∴ 原积分当且仅当 $p>1$，$r<1$ 或 $p=1$，$q>1$，$r<1$ 或 $p=q=1$，$r<1$ 时收敛。

例2 讨论以下积分的敛散性，若收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

（1）$I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\mu}dx$.

解 $I=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\mu}dx=\int_0^1\dfrac{\sin x}{x^\mu}dx+\int_1^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x^\mu}dx=I_1+I_2$.

前面已证明：

当 $\mu>1$，I_2 绝对收敛。

$0<\mu\leqslant1$，I_2 条件收敛。

$\mu\leqslant0$，I_2 发散。

又$x=0$是I_1的瑕点，当$x\to0$时$\dfrac{\sin x}{x^{\mu}}\sim\dfrac{1}{x^{\mu-1}}$，　∴　当且仅

当$\mu-1<1$，即$\mu<2$时绝对收敛，其余情形积分发散。

所以原积分当　$1<\mu<2$时绝对收敛。

$0<\mu\leqslant1$时条件收敛。

其余情形即：$\mu\leqslant0$及$\mu\geqslant2$时积分发散。

（2）$I=\int_0^{+\infty}x^p\sin x^q dx, q\neq0$。

解　令$x^q=t$，当$q>0$时，$x\in[0,+\infty)$

则$t\in[0,+\infty)$。

$q<0$时，$x\in[0,+\infty)$

则$t\in[+\infty,0)$。

$$\therefore\quad I=\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}t^{p/q}\sin t\cdot\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt, & (q>0)\\[2ex] \displaystyle\int_{+\infty}^{0}t^{p/q}\sin t\cdot\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}dt, & (q<0)\end{cases}$$

$$I=\pm\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}t^{\frac{p}{q}+\frac{1}{q}-1}\sin t\,dt$$

$$=\pm\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t\,dt}{t^{\frac{q-p-1}{q}}}$$

根据例1的讨论：

当且仅当$1<1-\dfrac{p+1}{q}<2$，即$-1<\dfrac{p+1}{q}<0$时积

分绝对收敛。

当且仅当 $0<1-\frac{p+1}{q}\leqslant 1$，即 $0\leqslant\frac{p+1}{q}<1$ 时积分条件收敛。

（3）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$。

解 $I=\int_0^1\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$

$=I_1+I_2$。

在I_1，令$x=\frac{1}{t}$，则$t=\frac{1}{x}$，$dx=-\frac{dt}{t^2}$得

而
$$I_1=\int_{+\infty}^1\frac{\sin\left(t+\frac{1}{t}\right)}{t^{-n}}\left(-\frac{dt}{t^2}\right)$$

$$=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{2-n}}dx\,.$$

故 $I=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^{2-n}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx$

$=I_1+I_2$。

1）∵ $\left|\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}\right|\leqslant\frac{1}{x^n}$，∴ 当$n>1$时，$I_2$绝对收

敛。

$$\text{ii)}\ \int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^n}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dx$$

而$\left|\int_1^A\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx\right|=\left|\cos 2-\cos\left(A+\frac{1}{A}\right)\right|\leqslant 2$。

当 $0<n\leqslant 1$ 时，$(x^n-x^{n-2})'=x^{n-3}[nx^2-(n-2)]>0$，

当 $x>1$ 时，(x^n-x^{n-2}) 单调上升，$\therefore\frac{1}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}$单调下降

且趋于零（当$x\to+\infty$时），$\therefore$ 当 $0<n\leqslant 1$ 时，I_2 收敛。

现在检查I_2是否绝对收敛。

$$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx=\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x+\frac{1}{x}}$$

$$\times\frac{x+\frac{1}{x}}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}dx\text{。但是}$$

$$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x+\frac{1}{x}}dx\xlongequal{\text{令}x+\frac{1}{x}=u}\int_2^{+\infty}\frac{|\sin u|}{u}du$$

发散。

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{x}}{x^n\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\begin{cases}1, & 当n=1\\ +\infty, & 当0<n<1\end{cases}$$

∴ 当 $0<n\leqslant1$ $\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$ 发散。

当$0<n\leqslant1$，I_2 条件收敛。

又当 $n\leqslant0$ 时，现在讨论 I_2 在 $n\leqslant0$ 时的敛散性。可以证明

$$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx发散。$$

$$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}\to1,$$

（当$x\to+\infty$）

∴ 只要证$\int_{1}^{+\infty}\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 发散，则当 $n\leqslant0$ 时

$$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx发散。$$

取 x_k 使$x_k+\frac{1}{x_k}=2k\pi$。

$$x_{k+1}+\frac{1}{x_{k+1}}=(2k+1)\pi。$$

∴ 当$k\to+\infty$时，$x_k\to+\infty$，$x_{k+1}\to+\infty$。

但是$\int_{x_k}^{x_{k+1}}\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$

$$=\int_{x_k+\frac{1}{x_k}}^{x_{k+1}+\frac{1}{x_{k+1}}}|\sin u|\,du=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}|\sin u|\,du$$

$\leqslant 2$.

按照柯西收敛原理：$\int_1^{+\infty}\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|\left(1-\frac{1}{x^2}\right)dx$ 发散。

因而 $\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^n}dx$，当$n\leqslant 0$时发散。

∴ 当$n>1$，I_2绝对收敛。

当$0<n\leqslant 1$，I_2条件收敛。

当$n\leqslant 0$，I_2发散。

∴ 当$2-n>1$，即$n<1$，I_1绝对收敛。

当$0<2-n\leqslant 1$，即$1\leqslant n\leqslant 2$，I_1条件收敛。

当$2-n\leqslant 0$，即$n\geqslant 2$，I_1发散。

∴ 当$0<n<2$，$I=I_1+I_2$积分条件收敛，其余情形积分发散。

§3 讨论常义积分与广义积分关于可积、绝对可积和平方可积的关系

（1）常义积分：$f\in R[a,b]\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}|f|\in R[a,b]$。

广义积分：$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty \underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} \int_a^{+\infty}f(x)dx<+\infty$。

$\int_a^b|f(x)|dx<+\infty$，$x=b$ 是瑕点 $\underset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow}\int_a^b f(x)dx<+\infty$。

（2）常义积分：$|f|\in R[a,b]\Longleftrightarrow f^2\in R[a,b]$。

广义积分：$\int_a^{+\infty}|f(x)|dx<+\infty \not\Leftrightarrow \int_a^{+\infty}f^2(x)dx<+\infty$。

$\int_a^b|f(x)|dx$（$x=b$ 是瑕点）收敛 $\underset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow}\int_a^b f^2(x)dx<+\infty$。

上述关系凡是成立的就要证明，不成立的就需要举例。

例　证明：$\int_a^b|f(x)|dx<+\infty$（$x=b$是瑕点）$\underset{\not\Rightarrow}{\Longleftarrow}\int_a^b f^2(x)dx<+\infty$。

证　由

$$[|f(x)|-1]^2=f^2(x)-2|f(x)|+1\geqslant 0$$

知道　$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}[1+f^2(x)]$

因为　$\int_a^b f^2(x)dx<+\infty$

$\therefore$　$\frac{1}{2}\int_a^b[1+f^2(x)]dx<+\infty$。

故 $\int_a^b |f(x)|dx<+\infty$。

反之，$\int_a^b |f(x)|dx<+\infty$，则不一定$\int_a^b f^2(x)dx<+\infty$。

举例：$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}<+\infty$，但是$\int_0^1 \frac{dx}{x}$发散。

第十一章 函数项级数和幂级数

§1 函数项级数的一致收敛及其判敛法

函数项级数的一致收敛是本章的重要概念，要求读者不仅深刻理解收敛与一致收敛的不同，而且能够判断函数项级数收敛或一致收敛。以下我们用 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$ 表示$f_n(x)$一致收敛于$f(x)$，

(A) 判断函数序列 $\{f_n(x)\}$: $x\in[a,b]$一致收敛有以下的方法：

1) $f_n(x)\rightrightarrows f(x)\Longleftrightarrow\|f_n(x)-f(x)\|$

$$=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\to 0$$

2) 关于函数序列一致收敛的柯西原理。

3) 化成相应的函数项级数，再用函数项级数判断一致收敛的方法。

例1 $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$，在$0<x<1$是否一致收敛?

解 为了用上述方法 1) 证明 $f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}$ 在$(0,1)$上一致收敛，必须先求极限函数$f(x)$。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}=0,\ x\in(0,1)$$

要证明 $\|f_n(x)-f(x)\|=\sup_{x\in(0,1)}|f_n(x)-f(x)|$

$$=\sup_{x\in(0,1)}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|$$ 可以任意小。

先求 $f'_n(x)=\frac{1}{n}\left(\ln\frac{x}{n}+1\right)$

不妨设 $n\geqslant3$，则当 $0<x<1$ 时，$\ln\frac{x}{n}+1<0$，即 $f_n(x)$ 单调减少。

又 $f_n(1)=\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}<0$，故

$$-\frac{1}{n}\ln n<f_n(x)<0.$$

又因 $\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$，故当 n 充分大时可使

$$\|f_n(x)-0\|=|f_n(x)|<\frac{\ln n}{n}<\varepsilon.$$

$\therefore\quad f_n(x)\rightrightarrows f(x),\quad(0<x<1)$。

例2　$f_n(x)=x^n-x^{2n}$，在 $0\leqslant x\leqslant1$ 是否一致收敛？

证　$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}(x^n-x^{2n})=0,\ (0\leqslant x\leqslant1)$

$$f'_n(x)=nx^{n-1}(1-2x^n)=0.$$

得到　$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$・由于$f_n(x)\geqslant 0$，而$f_n(0)=f_n(1)=0$。

∴　在$x_n=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$点$f_n(x)$取得极大值，

∴　$\|f_n(x)-f(x)\|=\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}|x^n-x^{2n}|=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$

∴　$f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)$，$0\leqslant x\leqslant 1$。

∴　$f_n(x)$在$[0,1]$上不一致收敛。

注：i）判定函数序列$f_n(x)$的一致收敛时，必须估计$\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$，因此往往需要先求$|f_n(x)-f(x)|$的极大值，但是带绝对值号求导很不方便，这时可以先求$(f_n(x)-f(x))$的极大值，然后求出$|f_n(x)-f(x)|$的极大值（如例1）。

ii）如果在$[a,b]$，$\frac{d}{dx}[f_n(x)-f(x)]\neq 0$，如例1

$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right]<0, x\in(0,1)$，我们知道函数$|f_n(x)-f(x)|$在区间内部没有极值点，而且是单调的，那么它在区间的一端取得最大，例1就在$x=1$处取得最大值，所以

$$\sup_{0<x<1}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right|=\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}.$$

iii）上面三个例题都是先求出函数序列的极限函数和$\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|$，这两者不好求时，只好诉之于一致或不

一致收敛的定义或柯西收敛原理。

关于函数序列$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$不一致收敛判别法总结于下：

i）不满足一致收敛的定义，要读者叙述不一致收敛的定义。

ii）$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\not\to 0$，即$\exists\ \varepsilon_0>0$，对任何自然数$N$，都存在$n_0>N$和$x_0\in[a,b]$，使$\|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\|\geqslant\varepsilon_0$成立。

iii）柯西一致收敛准则不满足，即：$\exists\ \varepsilon_0>0$，对任何自然数N，都存在$n_0>N$和$x_0\in[a,b]$，使

$$|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.$$

成立。

iv）若$f_n(x)$在$[a,b]$都连续，而极限函数$f(x)$不连续，则$f_n(x)$不一致收敛于$f(x)$。

（B）关于函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间$I=[a,b]$上的一致收敛问题。

判断收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$一致收敛的方法，总结如下：

i）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$I$上一致收敛$\Longleftrightarrow\|r_n(x)\|=$

$$=\|S(x)-S_n(x)\|=\sup_{x\in I}|S_n(x)-S(x)|\to 0,\ (n\to\infty).$$

ii）函数项级数一致收敛的柯西准则。

iii）四个判断函数项级数一致收敛的充分条件：维尔斯

特拉斯判别法，狄尼定理、阿贝尔判别法，狄立克莱判别法。

例1 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n}}x^n,\quad (0\leqslant x\leqslant 2)$$

的一致收敛性。

解 $\left|\frac{n^2}{\sqrt{n}}x^n\right|\leqslant\frac{n^2}{\sqrt{n}}2^n$

考虑级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\sqrt{n}}\frac{2^n}{n}$，应用达朗贝尔判别法

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\to 0,\quad (n\to\infty)$。∴ 级数收敛，再由维尔斯特拉斯判别法得知当$0\leqslant x\leqslant 2$时，原级数一致收敛。

例2 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n+x}}$，$0<x\leqslant 2\pi$，一致收敛。

证 设$\alpha_n(x)=\frac{1}{\sqrt{n+x}}$，$0<x\leqslant 2\pi$。

对于每一$x\in(0,2\pi]$，$\alpha_n(x)$随n单调下降，且

$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n(x)=0=\alpha(x)$。

$$|\alpha_n(x)-\alpha(x)|=\frac{1}{\sqrt{n+x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon^2}>0$，$n>N(\varepsilon)$，对于$\forall x\in(0,2\pi]$，

$$|\alpha_n(x)-\alpha(x)|<\varepsilon.$$

$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)$在$[0,2\pi]$上一致收敛于0。

设$\beta_n(x)=\sin x\sin nx$，$x\in(0,2\pi]$，设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n$的部分和 $B_n(x)=\left|\sum_{i=1}^{n}\beta_i(x)\right|=\left|\sin x(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\right|$

$$=\left|2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2}(\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx)\right|$$

$$=\left|\cos\frac{x}{2}\left(-\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{5}{2}x+\cos\frac{3}{2}x+\cdots\right.\right.$$

$$+\cos\left[\frac{x}{2}+(n-1)x\right]+\cos\left[(n-1)x-\frac{x}{2}\right]-\cos\left(\frac{x}{2}+nx\right)$$

$$\left.\left.+\cos\left(nx-\frac{x}{2}\right)\right)\right|$$

$$=\left|\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x\right)\right|$$

$$=\left|-2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x\right|$$

$$=\left|2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{n}{2}x\right|\leqslant 2,\quad \exists\, x\in(0,2\pi]$$

$\therefore\quad B_n(x)$在$(0,2\pi]$上一致有界。

由狄利克莱判别法，原级数在$(0,2\pi]$上一致收敛。

例3　下面证明级数$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上一致收敛的方法有何错误？

证　$\because \quad \lim_{n\to\infty} \frac{ne^{-nx}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} n^3 e^{-nx} = 0, \quad (0<x<+\infty)$

$\therefore$　当n充分大时，$ne^{-nx} \leqslant \frac{1}{n^2}$，而$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛。$\therefore$　根据维尔斯特拉斯判别法知道：

$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$，在$(0,+\infty)$上一致收敛。

上面证明是错误的，因为在证明中说的"当n充分大时$ne^{-nx} \leqslant \frac{1}{n^2}$"．未曾考虑这话是否适用于$(0,+\infty)$中一切$x$值，也就是说未曾找到一个不依赖于$x$的$N$，使得$n>N$时，$ne^{-nx} \leqslant \frac{1}{n^2}$对于$(0,+\infty)$内一切$x$成立，而这是证明级数一致收敛的关键，事实上$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$上不一致收敛。

证明如下：

$r_{n-1}(x) = ne^{-nx} + (n+1)e^{-(n+1)x} + (n+2)e^{-(n+2)x} + \cdots$

$e^x r_{n-1}(x) = ne^{-(n-1)x} + (n+1)e^{-nx} + (n+2)e^{-(n+1)x} + \cdots$

$\therefore \quad (e^x - 1) r_{n-1}(x) = ne^{-(n-1)x} + e^{-nx} + e^{-(n+1)x} +$

$$+e^{-(n+2)x}+\cdots$$

$$=ne^{-(n-1)x}+\frac{e^{-nx}}{1-e^{-x}}.$$

$$\therefore\quad r_{n-1}(x)=\frac{n}{(e^x-1)e^{(n-1)x}}+\frac{e^{-nx}}{(e^x-1)(1-e^{-x})}$$

$$=\frac{n}{(e^x-1)e^{(n-1)x}}+\frac{1}{(e^x-1)^2e^{(n-1)x}}$$

取 $x^*=\frac{1}{n-1}<1$, $(n>2)$

$$\therefore\quad r_{n-1}(x^*)>\frac{n}{(e^{x^*}-1)e}>\frac{n}{e(e-1)}$$

$\therefore$ 对于每个n，当$x\to0^+$时，$r_n(x)\longrightarrow+\infty$。

$\therefore$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在 $(0,+\infty)$ 不一致收敛。

例4 若每$u_n(x)$在$x=c$左连续，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(c)$ 发散，则在任何区间 $(c-\delta,c)$ 内 $(\delta>0)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 必不一致收敛。

证 假设$\exists\,\delta>0$，使$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(c-\delta,c)$ 内一致收敛，则$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,N>0$，当$n>N$时，$\forall$ 自然数p，不等式

$$|u_{n+1}(x)+\cdots\cdots+u_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

对于一切$x\in(c-\delta,c)$成立，又因为每一个$u_n(x)$在$x=c$左连续，∴每一$u_{n+1}(x)+\cdots\cdots+u_{n+p}(x)$也在$x=c$左连续，在以上不等式中取极限$(x\to c^-)$得

$$|u_{n+1}(c)+u_{n+2}(c)+\cdots\cdots+u_{n+p}(c)|\leqslant\varepsilon.$$

对于任意$n>N$及任意自然数p成立。

所以级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(c)$收敛，这与已知条件矛盾，所以不存在$\delta>0$，使$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$(c-\delta,c)$内一致收敛。

例如级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$(1,+\infty)$上不一致收敛。因为每一$\frac{1}{n^x}$在$[1,+\infty)$连续，并且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$在$x=1$点发散。

§2　一致收敛级数的性质

一致收敛级数可以保证和函数的连续性、一致连续性、可积性和可微性，要求学生不仅能够证明这些结论，而且应该会运用这些结论。

例1　证明$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$在$(0,+\infty)$连续。

证　$\forall x_0\in(0,+\infty)$，选$\left[\frac{x_0}{2},\ 2x_0\right]=[a,b]\subset(0,+\infty)$

在$\left[\frac{x_0}{2},2x_0\right]$上$ne^{-nx}$连续，且$0<ne^{-nx}\leqslant ne^{-n\frac{x_0}{2}}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-n\frac{x_0}{2}}$

收敛。∴ $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, 2x_0\right]$ 上一致收敛。∴ $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $\left[\frac{x_0}{2}, 2x_0\right]$ 上连续，因而在 x_0 点连续，而 x_0 是 $(0, +\infty)$ 内任一点，∴ $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上连续。

注意：§1例 5 已证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛。

例2 若每一 $u_n(x)$ 在 (a, b) 连续，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 内闭一致收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 (a, b) 连续，（此处 a, b 是有限数，或其中有无穷大）。

证明从略。

例3 问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$，$x \in (-\infty, +\infty)$，能否逐项求导？即问下列等式是否成立？

$$\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right\}' \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}\right)'$$

证 每一个 $\operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，且

$$u_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2} \sim \frac{x}{n^2}, \quad (\text{当 } n \to \infty)$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$。

$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 收敛。

下面再证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 一致收敛。

因为 $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{x^2}{n^4}} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，所以

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)'$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛，因而

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right]' = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}\right)',$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

上面证明应再仔细些，因为一般书中可微性定理是在闭区间 $[a,b]$ 上，请读者完成这个证明。

例 4 证明：

i) $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2} = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx$，当 $|r|<1$ 时成立。

ii) $\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}dx = 2\pi$，$\qquad |r|<1$。

证 设 $f(x)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx$。 $\qquad (*)$

$\because\ |r|<1,\quad |\cos nx|\leqslant 1,\ \therefore\ |r^n\cos nx|<r^n$。而 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ 收敛，则由维尔斯特拉斯判别法可知：

$\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx$ 一致收敛。

（＊）式两边同乘以正数 $(1-2r\cos x+r^2)$ 得：

$$(1-2r\cos x+r^2)\,f(x)=(1-2r\cos x+r^2)+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx-$$

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} r^n 2\cos x\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}\cos nx \qquad (**)$$

$\because\ 2\cos x\cos nx=\cos(n+1)x+\cos(n-1)x$。

则（＊＊）式右端为：

$$1-2r\cos x+r^2+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx-2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+1}[\cos(n+1)x+$$

$$\cos(n-1)x]+2\sum_{n=1}^{\infty} r^{n+2}\cos nx=1-2r\cos x+r^2+2r\cos x-2r^2$$

$$=1-r^2.$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx$ 一致收敛，$\therefore$ 可以逐项积分，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx+2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^n\cos nx\,dx.$$

而 $\int_{-\pi}^{\pi} r^n\cos nx\,dx=0\quad \therefore\ \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,dx=2\pi$。

例5　利用逐项积分法求下列级数的和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n},\ x\in(-\infty,+\infty).$$

解　$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，存在区间$[-a,a]$使得$x\in[-a,a]$。

$$\left|\frac{2n+1}{n!}x^{2n}\right|\leqslant\frac{2n+1}{n!}a^{2n}，而级数\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}a^{2n}收敛。$$

$\therefore$　$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$在$[-a,a]$上一致收敛。在$[-a,a]$上每一$u_n(x)=\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$　是连续的。$\therefore$　对于级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$可以逐项积分。

令　$F(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\int_0^x\left(1+\frac{3}{1!}x^2+\frac{5}{3!}x^6+\right.$

$\left.+\cdots+\frac{2n+1}{n!}x^{2n}+\cdots\right)dx$

$=\int_0^x dx+\int_0^x\frac{3}{1!}x^2dx+\cdots+\int_0^x\frac{2n+1}{n!}x^{2n}dx+\cdots$

$=x+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^5}{2!}+\frac{x^7}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{n!}+\cdots$

$=x\left(1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots\right)=xe^{x^2}.$

$\therefore$　$F(x)=xe^{x^2}$

而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=F'(x)=(1+2x^2)e^{x^2}$.

§3 幂级数

幂级数是一类特殊的函数项级数，它简单、有用. 历史上对于幂级数性质研究得最透彻，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$x\in[a,b]$有以下这些性质：

1. 收敛域简单、易求，先求收敛半径R：

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}}, & \text{当 } 0<\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}<+\infty\text{时；}\\ \infty, & \text{当 } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0\text{ 时；}\\ 0, & \text{当 } \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\infty\text{时；}\end{cases}$$

在端点$x=\pm R$的收敛性，单独考虑.

2. 由于幂级数(i)具有内闭一致收敛性，(ii)逐项微分与逐项积分时所得级数收敛半径不变；因此在$(-R,R)$内幂级数连续，可逐项微分，在$[a,b]\subset(-R,R)$可逐项积分.

3. 若幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=R$收敛，则一致收敛性可延续到$R$，即在$[-R+\delta, R]$上一致收敛，因此在$x=R$幂级数左连续，且可在$[-R+\delta, R]$上逐项积分.

4. 若$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$在$x=R$发散，则不可能在$[R-\delta,R]$内一

致收敛，对于以上四个性质，要求学生对比一般函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是否具有类似的性质。

注意：除第 4 个性质外，一般函数项级数都没有这种性质。

习作课不仅帮助学生总结幂级数的性质，更重要的是要学生会将函数展开成幂级数，并能讨论它的收敛域。

例 1 求以下幂级数的收敛半径，并讨论收敛区间端点的情况，最后确定收敛域。

1）$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$；（收敛域为$[-3,3)$）

2）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}}$；（收敛域为$(-2,2)$）

3）$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{1 \cdot 2 \cdots n} x^{2n}$；（收敛域为

$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$）

4）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$；（收敛域为$(-4,4)$）

5）$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} x^n$；（提示；分别考虑两个级数

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n} x^n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n} x^n$，收敛域为 $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$）

例2 进行适当的变量替换，求以下幂级数的收敛域。

1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n^2}$；（收敛域为$[-2,0]$）

2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot3\cdots(n+1)}{1\cdot2\cdots n}(x-1)^n$；（收敛域为$(0,2)$）

3）$\sum_{n=1}^{\infty}n!\,(x-2)^n$；（收敛域为$x=2$）

4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n$；（收敛域为$x\geqslant\frac{1}{2}$）

5）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$。（级数发散）

例3 证明：若$f(x)$在(a,b)内有任意阶导数，且$\{f^{(n)}(x)\}$在(a,b)内一致有界，则$f(x)$在(a,b)内任何点都能展成幂级数。

证 由于$f(x)$在(a,b)内有任意阶导数。$\forall x_0\in(a,b)$，写出$f(x)$在x_0点的泰勒展开式。

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n,$$

其中$R_n=\frac{|f^{(n)}[x_0+\theta(x-x_0)]|}{n!}|x-x_0|^n$，$(0<\theta<1)$

$\because$ $\{f^{(n)}(x)\}$在(a,b)内一致有界，即$\exists M>0$，使

$|f^{(n)}(x)|\leqslant M$，对于一切n及一切$x\in(a,b)$均成立。

故

$$R_n(x) \leqslant \frac{M}{n!}|x-x_0|^n \to 0, \quad (n\to\infty)$$

∴$f(x)$在(a,b)内任一点均能展成幂级数。

例4 证明：若$f(x)$为偶函数，且在$x=0$点的邻域能展成幂级数，则其展开式中只含有偶次幂的项。

证 因为$f(x)$为偶函数，∴ $f(-x)=f(x)$。因为$f(x)$在$x=0$能展成幂级数，设

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, \quad x\neq 0.$$

所以 $$f(-x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n x^n.$$

因为 $f(x)=f(-x)$

∴ $a_n x^n=(-1)^n a_n x^n$，由此 $a_n=(-1)^n a_n$。

当 $n=2k$时，$a_n=a_n$。

当 $n=2k+1$时，$a_n=-a_n \Rightarrow a_n=0$。

∴ $f(x)$的展开式中只含有偶次幂的项。

注：此处用到“一个函数在点x_0展成幂级数是唯一的”这一性质。

例5 将下列函数展成幂级数，并求收敛域。

1）$\arcsin x$在$x=0$点。

解：设$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。因为

$$(1+t)^\alpha=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n.$$

设 $\alpha=-\frac{1}{2}$，$t=-x^2$，代入上式有

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad (|x|<1).$$

由 0 到 x 逐项积分 $f(x)$

$$\int_0^x f(x)dx=\int_0^x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}dx$$

$$=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad |x|<1.$$

还需要检查 $x=\pm1$ 时，$\arcsin x$ 的泰勒展开式是否收敛。

当 $x=1$ 时，级数为 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}$ 不能用达朗贝尔法判敛，下面介绍一种新的判别法——拉阿贝判敛法：

对于正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$，记 $D_n=n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$.

若存在 $r>1$，当 n 充分大时，有 $D_n\geqslant r>1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛。

若当 n 充分大时有 $D_n\leqslant1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散。

证明从略。

或 $\lim\limits_{n\to\infty} D_n = l > 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛。

$\lim\limits_{n\to\infty} D_n = l \leqslant 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。

对于上题使用拉阿贝判敛法：

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = n\left(\frac{6n+5}{4n^2+4n+1}\right) \to \frac{3}{2} > 1.$$

∴ 当 $x=1$ 时，级数收敛。

当 $x=-1$ 时，级数显然收敛。

从以上两个结果，知道

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{1}{2n+1}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^{2n+1}\frac{1}{2n+1}$$

$$=\arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}.$$

2）计算 $\int_0^x e^{-x^2}dx$ 及 $\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx$。

计算从略

$$\int_0^x e^{-x^2}dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} +$$

$$+\cdots, \qquad |x| < +\infty.$$

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}dx = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!!},$$

$$|x| < +\infty.$$

（此处补充$\left.\frac{\sin x}{x}\right|_{x=0}=1$）

例 6 求下列级数的和函数：

1）$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$。

解 设$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{2^n n!}x^n$，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 2(n+1)\frac{n^2+1}{n^2+2n+2} \to \infty.$$

∴ 收敛半径为∞。

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2-n+n+1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{n(n-1)}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right]\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^n +$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}.$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-2)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-2}$$

$$+\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}.$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}+\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}+$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}.$$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)^{2}e^{\frac{x}{2}}+\left(\frac{x}{2}\right)e^{\frac{x}{2}}+e^{\frac{x}{2}}$$

$$=\left(\frac{x^{2}}{4}+\frac{x}{2}+1\right)e^{\frac{x}{2}}.$$

2） $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}$.

解 $\because\ \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\frac{2n+2}{2n+1}\to 1$，$(n\to\infty)$

所以收敛半径为 1。

设 $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}$.

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}nx^{n-1}.$$

$$(1-x)f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}n\ (1-x)\ x^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}n\ (x^{n-1}-x^{n})$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}\right]=\frac{1}{2}f(x).$$

$\therefore\quad \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{1-x}$，且 $f(0)=1$，此为一阶微分方程，它的解是：

$\ln f(x)=-\dfrac{1}{2}\ln(1-x)+\ln C$，由$f(0)=1$，确定$C=1$，

即 $\ln f(x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，$\therefore\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$，所以

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{n}=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\quad |x|<1.$$

当 $x=1$时，级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$，由拉阿贝判敛法：

$$n\ \left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\ =\frac{n}{2n+1}\to\frac{1}{2}<1.$$

$\therefore$ 级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$发散。

当 $x=-1$时，级数为交错级数。

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$。

$\because$ $\dfrac{2n+1}{2n+2}<1$，所以$a_n>\left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)a_n=a_{n+1}$，即$\{a_n\}$是单调递减的，又

$$0<a_n=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\text{（可用数学归纳法证明）}$$

而 $\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}\rightarrow 0$，$(n\rightarrow\infty)$，即有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。根据莱布尼兹判敛法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛。

所以 $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$收敛。$-1\leqslant x<1$。

例 6 求$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^n\cdot x)}{n!}$的麦克劳林级数，说明它的麦克劳林级数并不表示这个函数。

解 $\because$ $\left|\dfrac{\sin(2^n\cdot x)}{n!}\right|\leqslant\dfrac{1}{n!}$，由维氏判别法知道

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^n\cdot x)}{n!}$在$(-\infty,+\infty)$内一致收敛，且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2^n\cdot x)}{n!}$

的每一项具有连续导数，由逐项求导定理：

$$f(x)=\sin x+\frac{\sin 2x}{1!}+\frac{\sin 2^2x}{2!}+\frac{\sin 2^3\cdot x}{3!}+\cdots\cdots.$$

$$f'(x)=\cos x+\frac{2\cos 2x}{1!}+\frac{2^2\cos 2^2x}{2!}+\frac{2^3\cos 2^3x}{3!}+\cdots\cdots$$

$$f'(0)=1+2+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+\cdots\cdots=e^2.$$

$$f''(x)=-\sin x-\frac{2^2}{1!}\sin 2x-\frac{(2^2)^2}{2!}\sin 2^2x-$$

$$\frac{(2^3)^2}{3!}\sin 2^3x-\frac{(2^4)^2}{4!}\sin 2^4x+\cdots\cdots.$$

$$f''(0)=0.$$

$$f'''(x)=-\cos x-2^3\cos 2x-\frac{(2^2)^3}{2!}\cos 2^2x-\frac{(2^3)^3}{3!}\cos 2^3x-$$

$$-\frac{(2^4)^3}{4!}\cos 2^4x-\cdots\cdots$$

$$f'''(0)=-e^{2^3}$$

……

一般地，

$$f^{(m)}(0)=\begin{cases}0, m=2k\\(-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{(2k+1)n}}{n!}=(-1)^k e^{2^{(2k+1)}},\end{cases}$$

$m=2k+1$，$k=0,1$，……

因为 $f(x)$ 的各阶导数都存在，可写出它的麦克劳林级数为：

$$e^2x-\frac{e^{2^3}}{3!}x^3+\frac{e^{2^5}}{5!}x^5+\cdots+(-1)^k e^{2^{2k+1}}x^{2k+1}+\cdots.$$

设 $a_n=\dfrac{e^{2^n}}{n!}$，考察级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，用不等式

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n,\qquad (n>1).$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{e^{2^n}}{n!}>\frac{e^{2^n}}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}.$$

不等式取对数后得到：

$$\ln a_n>2^n-n\ln\frac{n+1}{2}.$$

两边除以 n：

$$\ln\sqrt[n]{a_n}>\frac{2^n}{n}-\ln\frac{n+1}{2}.\qquad (*)$$

因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^n}{n}}{\ln\frac{n+1}{2}}=+\infty.$$

$\therefore\quad \forall E>0,\ \exists N>0,\ \forall n>N$ 时，有

$$\frac{\frac{2^n}{n}}{\ln\frac{n+1}{2}}>E.$$

即 $\dfrac{2^n}{n}>E\ln\dfrac{n+1}{2}$。

将上式代入(*)得

$$\ln\sqrt[n]{a_n}>(E-1)\ln\frac{n+1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$。

故 收敛半径为0。

故 $f(x)\neq\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$。

我们知道就是$f(x)$的麦克劳林级数收敛，也不一定收敛于$f(x)$，例如函数$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$的麦克劳林级数在$(-\infty, +\infty)$上收敛，但它不收敛于$f(x)$，在麦克劳林公式中

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)=$$

$$=S_n(x)-R_n(x).$$

只有当 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0$时，麦克劳林级数才收敛于$f(x)$。

上面这些结论在函数展开成幂级数时，务必要求读者在理论上弄清楚。

即 $\frac{2^n}{n}>E\ln\frac{n+1}{2}$。

将上式代入(*)得

$$\ln\sqrt[n]{a_n}>(E-1)\ln\frac{n+1}{2}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=+\infty$。

故 收敛半径为0。

故 $f(x)\neq\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$。

我们知道就是$f(x)$的麦克劳林级数收敛，也不一定收敛于$f(x)$，例如函数$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$的麦克劳林级数在$(-\infty,+\infty)$上收敛，但它不收敛于$f(x)$，在麦克劳林公式中

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)=$$

$$=S_n(x)-R_n(x).$$

只有当 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}[f(x)-S_n(x)]=0$时，麦克劳林级数才收敛于$f(x)$。

上面这些结论在函数展开成幂级数时，务必要求读者在理论上弄清楚。

内 容 简 介

本书是在北京师范大学数学系数学分析习作课实践的基础上编写的. 内容包括多元函数微分学、多元函数积分学、场论、含参变量的积分、三角级数和综合练习等.

本书可作为高等师范院校和师范专科学校数学系师生的参考书或教学参考书.

目　　录

第十二章　多元函数极限论

本章主要内容有两方面。一方面是把数列极限及极限理论由实数域 $\boldsymbol{R}^1$ 推广到 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$，从而建立多元连续函数在有界闭区域上的整体性质，给多元函数分析学奠定基础。另一方面是把一元函数极限概念推广到多元函数，由此引伸出多元函数关于点的极限（即全面极限或多重极限）与关于坐标的极限（即累次极限），二者互相发挥，交织为许多精湛的结果，构成多元微积分理论与计算的基础。

本章习作课主要内容：多元函数极限概念及求极限方法以及多元函数全面极限与累次极限的关系。

本章习作课训练要点：

1. 要求学生理解并掌握多元函数极限概念，初步学习多元函数极限的"$\varepsilon—\delta$"方法及一些常用的求极限方法。

2. 要求学生理解全面极限与累次极限的关系，从而加深对多元函数极限过程复杂性的了解，初步体会由单元函数微积分到多元函数微积分的突变。

本章习作课基本内容可以安排下面几个题目。

§1　极限概念

以二元函数为例来说明多元函数极限概念的要点。最简

单的一种极限定义如下：

定义 1 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 的空心邻域（即 f 在点 $\hat{x}_0$ 的某个邻域中，可能除掉 $\hat{x}_0$ 本身外处处有定义）中。如果存在常数 A，对于任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|\hat{x}-\hat{x}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 f 在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

如果用符号 $\mathring{U}(\hat{x}_0,\delta)=\{\hat{x}=(x,y)\mid 0<|\hat{x}-\hat{x}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ 表示以点 $\hat{x}_0$ 为中心以 $\delta>0$ 为半径的空心邻域，则上述定义可改述如下：

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\mathring{U}(\hat{x}_0,\delta)$ $\forall x\in\mathring{U}(\hat{x}_0,\delta)$，有 $|f(\hat{x})-A|<\varepsilon$，这是以点 $\hat{x}_0$ 的"圆邻域"叙述的极限定义的，还可以用"方邻域"的形式叙述，即

定义 1′ 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 的空心邻域中。如果存在数 A，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 时，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 f 在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 的极限。

容易证明上述两个定义是等价的。

对于上述定义，特别要注意两点：

(1) 上述定义只适合在点 $\hat{x}_0$ 的某个空心邻域中处处有定义的函数，因此它能鉴定的函数的范围是比较狭窄的。请看

例 1 设 $f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(i) 如果 f 的定义域为 $D_1=\boldsymbol{R}^2\setminus\{(0,0)\}$，问：当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，f 的极限存在吗？

(ii) 如果 f 的定义域为 $D_2=\{(x,y)\mid |y|<x^2\}$，问：当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，f 的极限存在吗？

对于（i），只要取 $y=kx$，即知 f 在点 $(0,0)$ 的极限是不存在的。对于（ii），由于 f 在点 $(0,0)$ 任何空心邻域中都不是处处有定义的，因而定义 1 对它无能为力。

教师可抓住此事对学生进行函数概念的再教育，因为学生总是只注意函数的"表达式"而不注意它的定义域，殊不知二者不能分离。例 1 中的两个问题是讨论两个函数在同一点的极限问题。

(2) 要特别注意"方邻域"的条件"$|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$, 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$"并不等价于条件"$0<|x-x_0|<\delta$, $0<|y-y_0|<\delta$"，后者条件太强了，它要求 $x\neq x_0$ 且 $y\neq y_0$，而极限定义仅要求 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$，可以允许 $x=x_0$ 或 $y=y_0$。可用下面两例来检验学生对这个概念的理解程度。

例 2 用下面的方法证明极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{|x|+|y|}=0$ 行不行？

因为 $2\sqrt{|xy|}\leqslant|x|+|y|$，所以

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|}\leqslant\frac{|xy|}{2\sqrt{|xy|}}=\frac{1}{2}\sqrt{|xy|}\leqslant\frac{1}{4}(|x|+|y|)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{xy}{|x|+|y|}-0\right|<\varepsilon，故 \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{|x|+|y|}=0。证毕$$

上面证法有错误，因为在不等式放大过程中可能有分母为零的情况出现。请同学把正确的证明过程写出来。

例 3 有人企图用下面方法证明命题："若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$，且 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=l$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l$"．

由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)\Rightarrow\forall y$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta_1>0$，$\forall x$：$0<|x-x_0|<\delta_1$，有 $|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon/2$，

由 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=l\Rightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0,\forall y$：$0<|y-y_0|<\delta_2$．有 $|\varphi(y)-l|<\varepsilon/2$．

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，则

$\forall(x,y)$：$0<|x-x_0|<\delta$，$0<|y-y_0|<\delta$，有

$$|f(x,y)-l|\leqslant|f(x,y)-\varphi(y)|+|\varphi(y)-l|<\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=l$。

你认为上述命题有问题还是证明方法有问题？如果你认为命题正确，请考察函数

$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$ 在点（0,0）的极限；如果你认为证明方法有问题，请找出错误。

此题一方面检验学生对极限定义中条件"$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$ 且 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$"的理解程度，另一方面检

验学生对极限定义中 ε，δ 与点 (x,y) 的关系的理解程度，这是极限概念的精髓。

为了对更多的函数也能考虑极限问题，需要把定义 1 推广如下

定义 2 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上，$\hat{x}_0=(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点。如果存在数 A，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\forall \hat{x}=(x,y)\in \mathring{U}(\hat{x}_0,\delta)\cap D$，有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 f 在点 $\hat{x}_0$ 的极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

按照这个定义，就可以考虑例 1 (ii) 中函数 f 在点 $(0,0)$ 的极限了，注意到不等式 $|f(x,y)-1|\leqslant 2x^2$，即知 f 在点 $(0,0)$ 的极限是 1。

由极限定义容易相信（请看下面练习），如果要证明函数 f 在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 处极限不存在，只要选取不同路径 L_1 与 L_2，使得点 $\hat{x}$ 分别沿 L_1、L_2 趋于 $\hat{x}_0$ 时极限不相同，或者选取一条路径 L，使得 $\hat{x}$ 沿 L 趋于 $\hat{x}_0$ 时极限不存在。

例 4 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 定义在 $D=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ 上。证明：当动点 (x,y) 沿任何一条形如 $y=kx^2$ 的曲线趋于点 $(0,0)$ 时极限存在，但函数 f 在点 $(0,0)$ 的极限不存在。

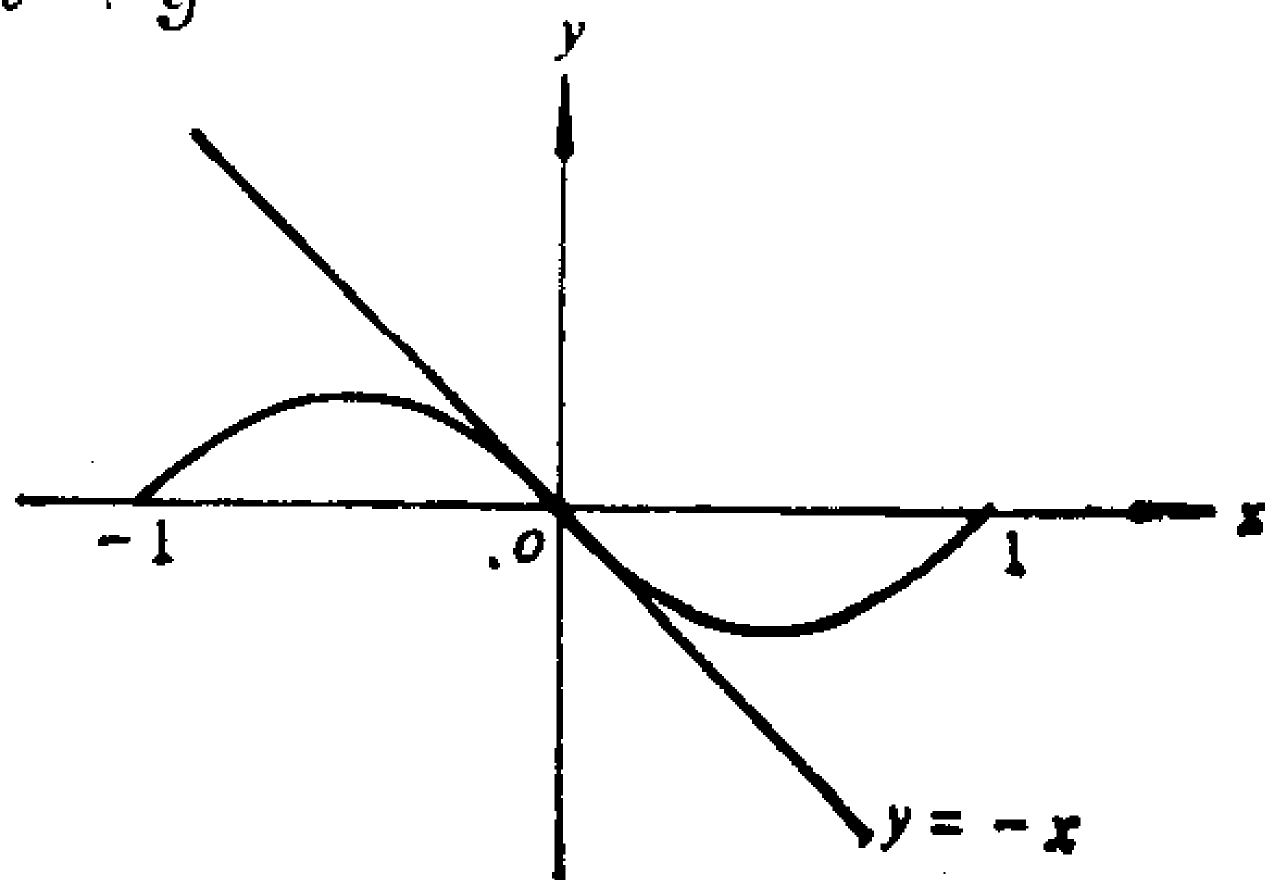


图 1

易知，当动点 (x,y) 沿任何一条形如 $y=kx^2$ 的曲线

趋于点（0,0）时，$f(x,kx^2)=\frac{k^2x^4}{x^3+k^3x^6}$ 的极限是0. 如何选取经过点（0,0）的特殊路径 L，使得动点 (x,y) 沿 L 趋于（0,0）时 f 的极限不存在呢?

由函数 $f(x,y)=\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ 的构造看出它在直线 $y=-x$ 附近出现奇异情况，因此选择的路经 L 应该紧贴着直线 $y=-x$，当动点愈靠近原点时，L 愈逼近直线 $y=-x$，最自然的想法可以选取一条经过原点的光滑曲线 $y=\varphi(x)$ 使得它在原点的切线正好是 $y=-x$. 经过具体计算可取 $y=x(x^2-1)^{1/3}$ 作为路经 L，此时当动点沿此路径逼近原点时，函数 f 的值趋于 ∞；而当动点沿形如 $y=kx^2$ 的路径趋于原点时，函数 f 的值趋于0，故 f 在原点的极限不存在.

练习1 （1） 若 $f\left(x+y,\frac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$

$\left(\text{答：} f(x,y)=x^2\frac{1-y}{1+y}\right)$

（2） 若 $f(x,y)=\frac{2xy}{x^2+y^2}$，求证：$f\left(1,\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$.

（3） 设 $F(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1)$ 且 $F(x,1)=x$，$(y\geqslant 0)$ 求 $f(x)$，$F(x,y)$. （答：$f(x)=x(x+2)$，$F(x,y)=x-1+\sqrt{y}$） .

练习2 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$ 且点 $(v_1,v_2)\neq(0,0)$ 求证：$\lim\limits_{t\to 0} f(x_0+tv_1,y_0+tv_2)=A$.

练习3 设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}} f(x,y)=A$，$y=\varphi(x)$ 在 x_0 连续且

$y_0=\varphi(x_0)$。求证：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x,\varphi(x))=A$。

练习4 研究下列函数在指定点 (x_0,y_0) 的极限的存在性。

(1) $f_1(x,y)=\dfrac{xy}{|x|+|y|}$，$f_2(x,y)=\dfrac{xy}{x+y}$ 在点 $(0,0)$；

(2) $f(x, y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ 在点 $(0,0)$。

(答：(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f_1(x,y)=0$，取曲线 $y=x(x^2-1)$ 即知 f_2 在点 $(0,0)$ 的极限不存在；(2) 取曲线 $y=x^2(x^2-1)$ 即知 f 在点 $(0,0)$ 的极限不存在)

练习5 设 $f(x,y)=\dfrac{1}{xy}$。

(1) 若 f 定义在 $D_1=\left\{(x,y)\,\middle|\,\dfrac{x}{k}\leqslant y\leqslant kx, k>1\right\}$ 上，问：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{1}{xy}$ 存在吗？

(2) 若 f 定义在 $D_2=\{(x, y)|\ x>0, y>0\}$ 上，问：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\dfrac{1}{xy}$ 存在吗？

(提示：极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)=A$ 指的是：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\Delta>0$，$\forall(x,y)$：$\sqrt{x^2+y^2}>\Delta$，有 $|f(x, y)-A|<\varepsilon$。关于 (1)，令 $\theta_1=\mathrm{arc\ tg}\dfrac{1}{k}>0,\theta_2=\mathrm{arctg}\,k>0$。再设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。易知 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty\\(x,y)\in D_1}}\dfrac{1}{xy}=0$。关于 (2)，易知 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to\infty\\(x,y)\in D_2}}\dfrac{1}{xy}$

不存在）

§2 求极限方法及全面极限与累次极限的关系

证明极限最基本的方法是"$\varepsilon—\delta$"方法，可用"圆邻域"，也可用"方邻域"。

例 1 用 $\varepsilon—\delta$ 方法证明下列极限

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=0$； (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt[3]{xy}=0$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0$。

证 (1) 考察 $\left|\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}-0\right|\leqslant\dfrac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}=x^2+y^2$，然后用"圆邻域"即可。

(2) $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\varepsilon^{3/2}$，然后用"方邻域"即可。

(3) 考察 $\left|\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}\right|\leqslant\dfrac{|x^3+y^3|}{x^2+y^2}$

$$\leqslant(|x|+|y|)\left|1-\frac{xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{3}{2}(|x|+|y|),$$

然后用"圆邻域"即可。

求极限方法中有两种方法比较重要，一种是换元法，常见的是极坐标换元，即设 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$。一种是把多元函数求极限问题化为单元函数求极限问题。

例 2 求下列函数的极限

(1) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(2) $I=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$,

(3) $I=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right)^{x^2}$.

解 (1) 设$\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 有 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,

所以当 $(x,y)\to(0,0)$ 时 $r\to0$, 又 $f(r\cos\theta, r\sin\theta)=r\sin\theta\cos\theta$。且 $\forall\theta$,有 $|\sin\theta\cos\theta|\leqslant1$,所以 $\lim\limits_{r\to0}f(r\cos\theta, r\sin\theta)=0$。故 $I=0$。

用极坐标换元时,特别要注意幅角θ不是常数,也就是说,如果证及动点沿一切射线趋于定点时,函数有共同极限,还不能表明此函数在该点存在极限。例如 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 在原点 (0,0) 就是此种情况。

(2) $$I=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}[(x^2e^{-x})e^{-y}+(y^2e^{-y})e^{-x}]$$
$$=(\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x})(\lim_{y\to+\infty}e^{-y})+(\lim_{x\to+\infty}e^{-x})(\lim_{y\to+\infty}y^2e^{-y})=0$$

此题运用了将多元函数极限化为单元函数极限的技巧。

(3) 由 $\dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 知 $I=0$。

例 3 记 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=l$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0}f(x,y)=l_{12}$, $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0}f(x,y)=l_{21}$, 研究下列二元函数 f 在点 (0,0) 处 l, l_{21}, l_{12} 的存在性及其关系。

(1) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ (答: l 存在,

$l_{12}=l_{21}$)

(2) $f(x,y)=\dfrac{xy-x+y}{xy+x+y}$ (答：l 不存在，$l_{12}\neq l_{21}$)

(3) $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ (答：l 不存在，$l_{12}=l_{21}$)

练习 1 求下列极限：

(1) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ (答：$I=0$)

(2) $I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$ (答：$I=1$)

(3) $I=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$ (答：$I=e$)

(4) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)$ (答：$I=0$)

练习 2 求 $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$ 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & (x,y)\text{为有理点,}\\ 0, & (x,y)\text{为其它点。}\end{cases}$$ (答：$I=0$)

练习 3 求下列极限：

(1) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{\sin x\sin y}$ (答：$I=1$)

(2) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{y\sin(xy(x+1))}{x^2+y^2}$ (答：$I=0$)

(3) $I=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sqrt{(1+4x^2)(1+6y^2)}-1}{2x^2+3y^2}$ (答：$I=1$)

练习 4 记 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=l$，$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=l_{12}$，$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=l_{21}$，研究下列函数在点 (0,0) 处 l，l_{12}，l_{21} 的存在性及其关系。

$$(1)\quad f(x,y)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}, & xy\neq0,\\ 0, & xy=0. \end{cases}$$

（答：l 存在，l_{12} 与 l_{21} 不存在）

$$(2)\quad f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}+y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0. \end{cases}$$

（答：l 不存在，l_{12} 不存在，l_{21} 存在）

§3 函数的连续性及杂题

研究函数在何处连续、在何处间断、在何处一致连续是最基本的问题。

例 1 研究下列函数的连续性：

(1) $f(x,y)=[x+y]$ （答：间断线是 $x+y=k$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$）

(2) $f(x,y)=\begin{cases} 0, & x\text{ 为无理数},\\ y, & x\text{ 为有理数}. \end{cases}$ （答：f 仅在 y 轴上连续）.

例 2 设 $f(x,y)=\dfrac{1-\cos xy}{y^2}$，$y\neq0$，问：能否在直线 $y=0$ 上定义 f 的值，使得 f 在全平面上连续？

解 因 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{1-\cos xy}{y^2}=\dfrac{x^2}{2}$，所以，

令 $\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos xy}{y^2}, & y\neq 0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & y=0,\end{cases}$

则 $\tilde{f}$ 在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上连续。

例 3 设一元函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数，在正方形 $I=[a,b]\times[a,b]$ 上定义一个二元函数

$$g(x,y)=\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\qquad x\neq y,(x,y)\in I.$$

问：能否在直线段 $x=y$，$(x,y)\in I$ 上定义 g 的值，使得 g 在 I 上连续？

解 令 $\tilde{g}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y,\end{cases}\quad (x,y)\in I.$

即可。

例 4 证明函数 $f(x,y)=\cos xy$ 在二维平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上不一致连续。

证 取点列 $\hat{x}_n=(\sqrt{n\pi},\sqrt{n\pi})$，$\hat{x}'_n=\left(\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}\pi},\sqrt{\dfrac{2n+1}{2}\pi}\right)$ 即可。

例 5 设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的区域，记 $\hat{x}=(x,y)$，$\hat{x}'=(x',y')$。称 $f(x,y)=\inf\{|\hat{x}-\hat{x}'|\,|\,\hat{x}'\in D,\ \hat{x}\in\boldsymbol{R}^2\}$ 为点 $\hat{x}$ 到 D 的**距离**。证明：二元函数 f 在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上一致连续。

证 $\forall\hat{x}_1,\hat{x}_2\in\boldsymbol{R}^2$，有 $f(\hat{x}_1)\leqslant|\hat{x}_1-\hat{x}|$，$f(\hat{x}_2)\leqslant|\hat{x}_2-\hat{x}|$，其中 $\hat{x}\in D$，所以 $|f(\hat{x}_1)-f(\hat{x}_2)|\leqslant|\hat{x}_1-\hat{x}_2|$，由此

得证。

例 6 设二元函数 $f(x,y)$ 在单位圆 $B=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$ 内一致连续，求证：可以把 f 连续延拓到单位闭圆 $\overline{B}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 上且在 $\overline{B}$ 上一致连续。

证 $\forall (x_0,y_0)\in\partial B=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$，利用柯西准则易知极限 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\(x,y)\in B}} f(x,y)=A(x_0,y_0)$ 存在，

令
$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in B,\\ A(x,y), & (x,y)\in\partial B,\end{cases}$$
即知 $\tilde{f}$ 在 $\overline{B}$ 上一致连续。

例 7 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在 $D\subset \boldsymbol{R}^2$ 上且对坐标 x 连续，对坐标 y 满足李普希兹条件，即
$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,(x,y'),(x,y'')\in D.$$
其中 L 为常数。求证：f 在 D 上连续。

证 $\forall (x_0,y_0)\in D$，考察
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+$$
$$+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|$$
因 f 对坐标 y 满足李普希兹条件，所以上式右端第一项有
$$|f(x,y)-f(x,y_0)|\leqslant L|y-y_0|$$
因 f 对坐标 x 连续，所以，对任意取定的 y_0，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$（可能与 y_0 有关），$\forall|x-x_0|<\delta$，有
$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$。不失一般性可取 $\delta<\varepsilon$，

于是 $\forall(x,y)$：$|x-x_0|<\delta$，$|y-y_0|<\delta$，则有
$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant L|y-y_0|+\varepsilon<\varepsilon(1+L)$$
故 f 在 D 上连续。证毕。

思考：(1) 考察不等式 $|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\leqslant|f(x,y)$

$-f(x_0,y)|+|f(x_0,y)-f(x_0,y_0)|$ 行吗？

(2) 把 f 对 y 的李普希兹条件改为"f 对坐标 y 连续"行吗？如果改成"f 对坐标 y 连续且单调"行吗？

(3) 此命题是否有更强的结论："f 在 D 上一致连续。"

例 8 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 $D\subset \boldsymbol{R}^2$ 上的连续正值函数，求证：存在 $K>0$，对一切 $(x,y)\in D$，有 $f(x,y)>K$。

证 利用连续函数在有界闭域上能达到最小值的性质即可证得。

练习 1 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2-y^2}, & x^2+y^2\leqslant 1,\\ \exp\{-(x^2+y^2-1)^{-1}\}, & x^2+y^2>1.\end{cases}$$

问：f 在闭单位圆上一致连续吗？在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上一致连续吗？

练习 2 设二元函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，一元函数列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛且 $\varphi_n(x)\in[c,d]$，求证：一元函数列 $g_n(x)=f(x,\varphi_n(x))$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

练习 3 设 D 是 $\boldsymbol{R}^2$ 中的有界闭域，$d(D)$ 是 D 的直径，即 $d(D)=\sup\{|\hat{x}-\hat{y}|\ |\hat{x},\ \hat{y}\in D\}$，求证：存在 $\hat{x}_0$，$\hat{y}_0\in D$，使得 $|\hat{x}_0-\hat{y}_0|=d(D)$。（提示：利用多元连续函数在紧集上的性质）。

练习 4 设 $f(x,y)$ 定义在 $\boldsymbol{R}^2$ 上，求证：$f(x,y)$ 在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上连续的充要条件是对任何一个有界闭集 $D\subset\boldsymbol{R}^2$，$f(x,y)$ 在 D 上连续。（提示：$\forall\hat{x}_0=(x_0,y_0)\in\boldsymbol{R}^2$，选取收敛于 $\hat{x}_0$ 的点列 $\{\hat{x}_n\}$，构造 $D=\{\hat{x}_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots\}$）。

练习 5 证明 Lebesgue 引理：设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的紧集，$\mathscr{G}=\{G_\alpha\}$ 是 D 的开覆盖，则存在正数 $\rho>0$，对任意的 $\hat{x}=(x,y)\in D$，存在开集 $G_\alpha\in\mathscr{G}$，使得以 $\hat{x}$ 为中心 ρ 为半径的邻域 $U(\hat{x},\rho)\subset G_\alpha$。（提示：$\forall\,\hat{x}\in D$，$\exists G_\alpha\in\mathscr{G}$，使得 $\hat{x}\in G_\alpha$，作 $U(\hat{x},2r_x)\subset G_\alpha$，然后利用有限覆盖原理）。

第十三章 多元函数微分学

本章内容象单元函数微分学一样是以变化率为中心展开的，由于多元函数存在关于点的极限与关于坐标的极限两种极限形式，因此多元微分学概念要比单元微分学复杂些，其中最重要的就是要搞清楚函数可微，偏导数存在，偏导数连续与函数连续之间的关系。在计算方面，由于多元函数的复合出现了错综复杂的局面，给复合函数求导（尤其是求高阶导数）带来了技术上的困难。在理论方面，我们利用单元连续函数性质（如介值性等）解决了隐函数存在问题并得到求隐函数导数的方法。在应用方面，不仅把单元函数求内极值点的方法推广到多元函数（即普通极值），而且发展为一种在闭集中求极值点的方法（即条件极值的拉格朗日乘数法）。

本章习作课主要内容：多元函数可微，连续及偏导数之间的关系以及复合函数及隐函数的求导方法。

本章习作课训练要点：

1. 要求学生搞清可微，连续，偏导数存在与偏导数连续之间的关系。

2. 要求学生熟练掌握复合函数与隐函数的求导方法，初步掌握进行变量替换时求导的方法。

3. 初步了解隐函数定理的应用。

4. 学会求多元函数极值的方法。

本章习作课基本内容分下面几个题目。

§1 微分学概念

下面的例题对于搞清可微，连续，偏导数存在，偏导数连续之间的关系是有好处的。

例 1 （1）函数在一点的偏导数存在，但函数在此点不一定可微。例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在点（0,0）连续且 $f'_x(0,0)$ 与 $f'_y(0,0)$ 皆存在，但 f 在(0,0)点不可微。又如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

在点（0，0）不连续因而不可微，但 $f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 存在。

（2）函数在一点沿任何方向的方向导数都存在，但函数在此点仍不一定可微，例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0\quad, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

沿任何方向 v 的方向导数都存在，有

$$\partial_v f(0)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2\theta}{\cos\theta}, & \cos\theta\neq 0,\\ 0, & \cos\theta=0,\end{cases}$$

其中 $v=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，但 f 在（0，0）点不连续因而不可微。

（3）函数在一点的偏导数存在，但函数在此点沿任何方向（除去平行于 x 轴与 y 轴的方向）的方向导数不一定存在。例如

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y, & x=0 \text{ 或 } y=0,\\ 1, & \text{其它点}\end{cases}$$

有 $f'_x(0,0)=f'_y(0,0)=1$，但 f 在（0，0）点沿任何方向 $\boldsymbol{v}$（除去 x 轴与 y 轴的方向）的方向导数都不存在。

（3）函数在一点可微，但函数的偏导数在此点不一定连续。例如

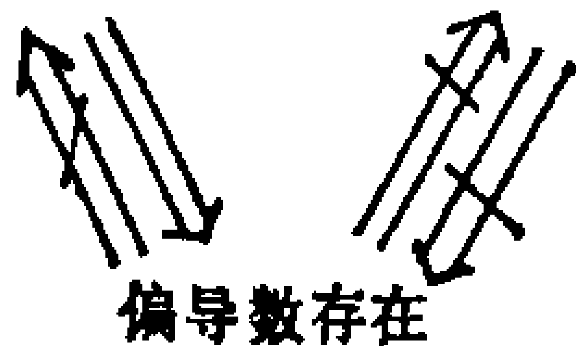
$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上处处可微，但 f 的偏导数在点（0，0）不连续。

可微，连续，偏导数存在，偏导数连续之间的关系可总结如下：

1° 重要结果：偏导数连续 $\Longrightarrow$ 可微。

2° 可微 $\rightleftarrows$ 连续



下例中的函数有点古怪，但对可微函数很能破除一点模糊观念。

例 2 证明：函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & (x,y)=\text{有理点},\\ 0 & ,(x,y)=\text{其它点},\end{cases}$$

仅在原点（0，0）连续且可微。

证：用偏导数的连续性可证明 f 在（0，0）可微。然后证明 f 在任一点 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 皆不连续。

例 3 设 $f'_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，$f'_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在，求证：f 在点 (x_0,y_0) 可微。

证 有 $\Delta u=f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)$

$$\begin{aligned}&=[f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0+h_1,y_0)]\\&\quad+[f(x_0+h_1,y_0)-f(x_0,y_0)]\\&=f'_y(x_0+h_1,y_0+\theta h_2)+f'_x(x_0,y_0)+o(h_1),\\&\qquad 0<\theta<1.\end{aligned}$$

由此即得本题。

例 4 设 $f(x,y)$ 定义在 $I=[a,b]\times[c,d]$ 上，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ 在 I 上连续，求证：f 对 y 满足李普希兹条件，即 $\forall(x,y)$，$(x,y_2)\in I$，$\exists L>0$ 使 $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|$。

证 任取定 $x\in[a,b]$，考虑一元函数 $f_x(y)=f(x,y)$，即把 f 看成是关于 y 的一元函数，对它利用拉格朗日中值定理，并利用二元连续函数 $f(x,y)$ 在闭区域 I 上的有界性即可得证。

例 5 我们知道，函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微时有下式成立：

$$\begin{aligned}&f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)\\&=Ah_1+Bh_2+o(\sqrt{h_1^2+h_2^2}),\end{aligned}\qquad (*)$$

其中 $h=(h_1,h_2)\neq 0$，A，B 是仅依赖于 x_0，y_0 的常数。

试证：存在函数 $\omega_1(h_1,h_2)$，$\omega_2(h_1,h_2)$，有

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0}\omega_1(h_1,h_2)=\omega_1(0,0)=0,$$

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0}\omega_2(h_1,h_2)=\omega_2(0,0)=0;$$

它们能将等式（*）变形为下列命题：$\forall h=(h_1,h_2)$。

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)$$
$$=[A+\omega_1(h_1,h_2)]h_1+[B+\omega_2(h_1,h_2)]h_2.$$

证 由（*）式知 $o(|h|)=|h|\omega^*(h)$，其中

$$\lim_{(h_1,h_2)\to 0}\omega^*(h_1,h_2)=0.$$

令 $$\omega(h_1,h_2)=\begin{cases}\omega^*(h_1,h_2), & (h_1,h_2)\neq(0,0),\\ 0, & (h_1,h_2)=(0,0),\end{cases}$$

则 $\lim\limits_{(h_1,h_2)\to 0}\omega(h_1,h_2)=\omega(0,0)=0$，于是，$\forall h=(h_1,h_2)$，有

$$f(x_0+h_1,y_0+h_2)-f(x_0,y_0)$$
$$=Ah_1+Bh_2+|h|\omega(h_1,h_2)$$

当 $(h_1,h_2)\neq(0,0)$ 时，有

$$|h|=\frac{h_1}{|h|}h_1+\frac{h_2}{|h|}h_2\Longrightarrow|h|\omega(h)=$$

$$=\frac{h_1\omega(h)}{|h|}h_1+\frac{h_2\omega(h)}{|h|}h_2$$

令 $$\omega_1(h)=\begin{cases}\dfrac{h_1\omega(h)}{|h|}, & h=(h_1,h_2)\neq 0,\\ 0, & h=(h_1,h_2)=0;\end{cases}$$

$$\omega_2(h)=\begin{cases}\dfrac{h_2\omega(h)}{|h|}, & h=(h_1,h_2)\neq 0,\\ 0, & h=(h_1,h_2)=0,\end{cases}$$

命题得证。

例 6 记 $\hat{x}=(x,y)$，$\hat{x}_0=(x_0,y_0)$，$\hat{h}=(\Delta x,\Delta y)$，$L(\hat{x}_0,\hat{h})=A\Delta x+B\Delta y$ 是 Δx，Δy 的二元线性实值函数。证明：二元函数 $f(x,y)$ 在点 $\hat{x}_0=(x_0,y_0)$ 可微当且仅当

$$f(\hat{x}_0+\hat{h})-f(\hat{x}_0)=L(\hat{x}_0,\hat{h})+o(|\hat{h}|)$$

或

$$\lim_{\hat{h}\to 0}\frac{f(\hat{x}_0+\hat{h})-f(\hat{x}_0)-L(\hat{x}_0,\hat{h})}{|\hat{h}|}=0$$

其中记号 $\hat{h}\to 0$ 表示 $\hat{h}=(h_1,h_2)\to(0,0)$。

例 7 命题："设二元函数 $f(x,y)$ 定义在区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ 上，且 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$，$(x,y)\in D$，则二元函数 $f(x,y)$ 与 y 无关"对吗？

考察下例。记 $I=\{(x,y)|x\geqslant 0,y=0\}$，$D=\mathbf{R}^2-I$。令

$$f(x,y)=\begin{cases}x^3, & x>0,y>0,\\ 0, & D\text{中其它点,}\end{cases}$$

易知 f 在 D 上连续可微且 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0,(x,y)\in D$，但 $f(1,1)=1,f(1,-1)=0$，于是知道 f 与 y 有关。

练习 1 设二元函数 $f(x,y)$ 的两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，在点 (x_0,y_0) 的邻域内处处存在且在该点可微，求证：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0,y_0)$$

此题条件比书中定理条件要弱一些，证明可仿照例 3 的方法进行。

练习 2 设二元函数 $f(x,y)$ 定义在包含原点 (0, 0) 的区域 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上且满足条件 $|f(x,y)|\leqslant x^2+y^2$. 求证 $f(x,y)$ 在原点 (0,0) 可微.

练习 3 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

又 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$是通过原点 (0,0) 的任意的可微曲线，这是说要 $x(0)=y(0)=0$, $x^2(t)+y^2(t)\neq 0$, $\forall 0\neq t\in[\alpha,\beta]$ 且 $x(t)$, $y(t)$ 可微，求证：函数 $f(x(t),y(t))$ 在$[\alpha,\beta]$上可微. 但函数 $f(x,y)$ 在原点 (0,0) 不可微.

(注意，要证一元函数 $f(x(t),y(t))$ 在 $t=0$ 点可微，但二元函数 $f(x,y)$ 在原点 (0,0) 虽连续但偏导数不存在)

练习 4 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续，二元函数 $g(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微且 $g(x_0,y_0)=0$, 求证: $f(x,y)g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微且

$$d[f(x,y)g(x,y)]_{(x_0,y_0)}=[f(x,y)dg(x,y)]_{(x_0,y_0)}$$

§2 微分学计算

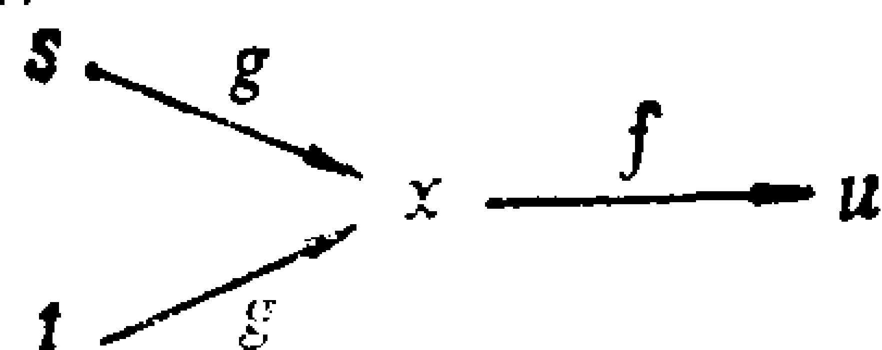
微分学计算是本章重点. 复合函数与隐函数微分法又是微分法的难点，特别是高阶导数的计算学生更易出错. 可以提醒学生注意以下几点.

(1) 初学复合函数求导时，可利用所谓“锁链图”帮

助学生理解，以免丢掉一些项，例如

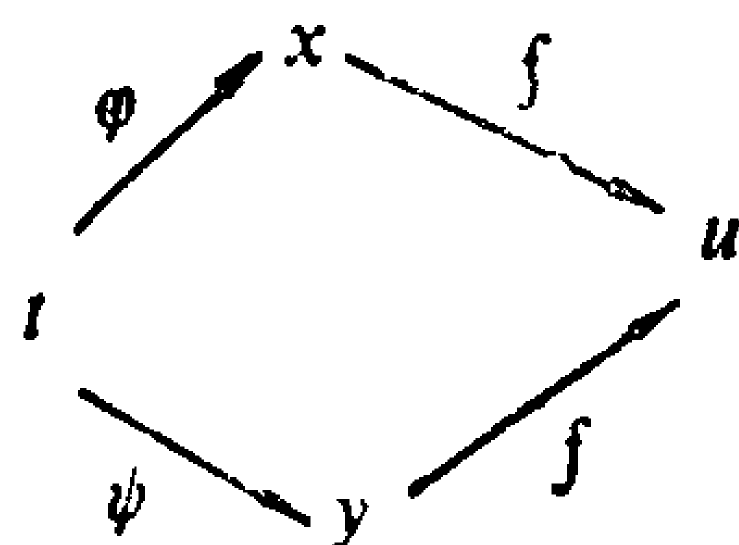
(a) $u=f(x)$，$x=g(s,t)$，

锁链图：



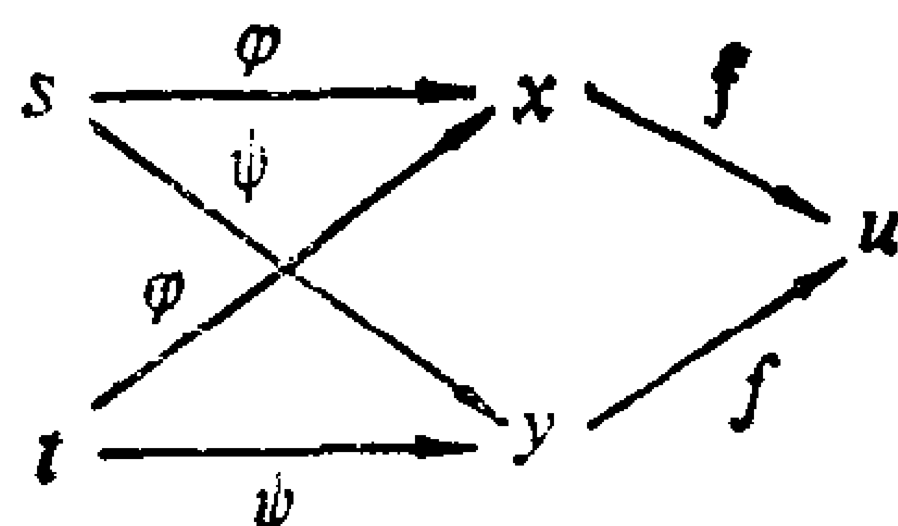
(b) $u=f(x,y)$，$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$，

锁链图：



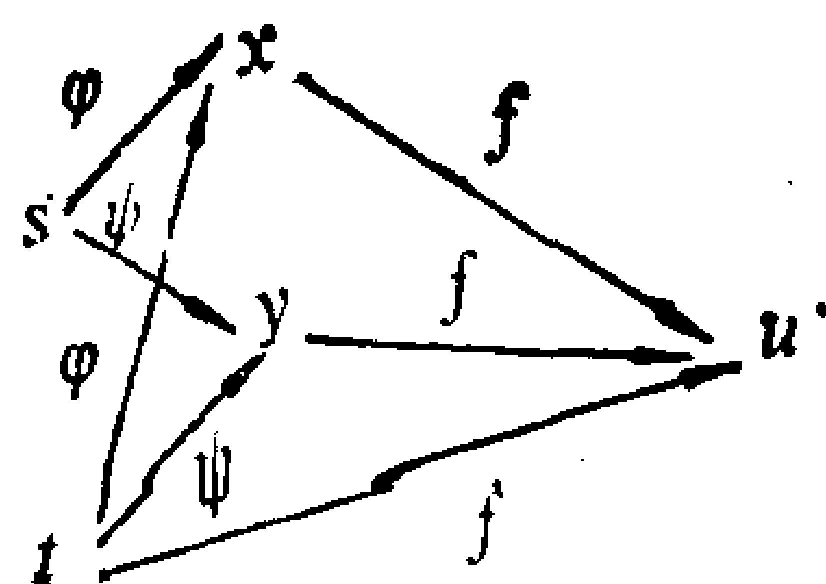
(c) $u=f(x,y)$，$\begin{cases}x=\varphi(s,t)\\ y=\psi(s,t)\end{cases}$，

锁链图：



(d) $u=f(x,y,t)$，$\begin{cases}x=\varphi(s,t)\\ y=\psi(s,t)\end{cases}$

锁链图：



(2) 复合函数锁链法则中$\left(\text{例如上式(c)有}\frac{\partial u}{\partial t}\right.$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial t},\ \left.\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial y}{\partial s}\right),$$

右边加项的个数等于函数 f 的坐标分量的个数，而每一加项中乘积因子的个数等于复合函数的个数。可用这个原则来检查计算时是否丢掉一些项。

(3) 求高阶导数时最容易丢掉一些项，究其原因，恐怕是对复合函数的一阶导数式子左右两边各项的函数关系理解不够所致。我们以上式 (c)为例来说明这一点。

对于复合函数的一阶偏导数公式

$$\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} \qquad (*)$$

要特别注意两点：

(a) 上式两边 u 的含义是不一样的。左边的 u 表示已经复合的函数，即 $u=f(\varphi(s,t),\ \psi(s,t))$。右边的 u 表示还没复合的函数，即 $u=f(x,y)$。

(b) 上式两边都在点 (s,t) 处取值。因此，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ 应理解为先把 $f(x,y)$ 对 x,y 求偏导数，然后再将 $x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$ 代入而得的值，可记作 $\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s,t),\psi(s,t))$，$\frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(s,t),\ \psi(s,t))$。即应把它们看成是经过中间变量 x，y 而成为 s，t 的复合函数。而学生往往把它们理解成 x，y 的函数，从而在求高阶导数时常常出错。

由（$*$）式容易得到下式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 s}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)\frac{\partial u}{\partial y}.$$

这里 $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)=\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}$，$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}$。大概没有疑义。然而 $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$，$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 应理解为已经复合的函数

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s,t),\psi(s,t)),\ \frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(s,t),\psi(s,t))$$

对自变量 s 的偏导数，由复合函数的锁链法则应为

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial u}{\partial x}(\varphi(s,t),\psi(s,t))\right]$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{\partial u}{\partial y}(\varphi(s,t),\psi(s,t))\right] \qquad (**)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}$$

上式右端各项应理解在（s，t）点取值．例如，$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$应为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\varphi(s,t),\psi(s,t))$。

求 $\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$与$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$时有一个窍门：把（*）式中的$u$换成$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$即得（**）式。这个窍门的条件是替换的函数应都是未复合的函数及其偏导数，即函数 u 应理解为 f。

1．复合函数微分法

例 1 （1）设 $u=f(s,t)$，$s=\frac{x}{y}$，$t=\frac{y}{z}$。求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$。

（2）设 $u=f(s,t,y)$，$s=\varphi(x,y)$，$t=\psi(x,y)$。求 $\frac{\partial u}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$。

解 （1）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{-y}{z^2}\frac{\partial u}{\partial t}$，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}\ \frac{\partial u}{\partial s}\right)=\frac{-1}{y^2}\ \frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{y}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)$$

$$=\frac{-1}{y^2}\ \frac{\partial u}{\partial s}+\frac{1}{yz}\ \frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}-\frac{x}{y^3}\ \frac{\partial^2 u}{\partial s^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{2y}{z^3}\ \frac{\partial u}{\partial t}-\frac{y}{z^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{-y}{z^2}\right)$$

$$=\frac{2y}{z^3}\ \frac{\partial u}{\partial t}+\frac{y^2}{z^4}\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial s}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial t}{\partial x};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

上式右端的记号 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 表示未复合的函数 $u=f(s,t,y)$ 对 y 的偏导数在点 (x,y) 的值。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\ \frac{\partial s}{\partial x}\ \frac{\partial s}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial s\partial t}\ \frac{\partial s}{\partial y}\ \frac{\partial t}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial s}\ \frac{\partial s}{\partial x}\ \frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\ \frac{\partial t}{\partial x}\ \frac{\partial t}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial s}\ \frac{\partial^2 s}{\partial y\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}\ \frac{\partial^2 t}{\partial y\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

例 2 设 $x=\sqrt{vw}$，$y=\sqrt{wu}$，$z=\sqrt{uv}$。且记 $F(u,v,w)=f(\sqrt{vw},\sqrt{wu},\sqrt{uv})$，求证：

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z=uF'_u+vF'_v+wF'_w.$$

证 $$uF'_u=\frac{\sqrt{wu}}{2}f'_y+\frac{\sqrt{uv}}{2}f'_z$$

$$vF'_v=\frac{\sqrt{wv}}{2}f'_x+\frac{\sqrt{uv}}{2}f'_z$$

$$wF'_w=\frac{\sqrt{wv}}{2}f'_x+\frac{\sqrt{wu}}{2}f'_y.$$

三式相加即得.

例 3 设二元可微函数 F在直角坐标系中可写成$F(x,y)=f(x)g(y)\neq 0$,在极坐标系中可写 成$F(r\cos\theta,\ r\sin\theta)=h(r)$, 求$F(x,y)$

解 由 $0=\frac{dh(r)}{d\theta}$

$$=f'(x)g(y)(-r\sin\theta)+f(x)g'(y)(r\cos\theta)$$

$$\Longrightarrow\quad \frac{f'(x)}{xf(x)}=\frac{g'(y)}{yg(y)}=\lambda\Longrightarrow f(x)=C_1e^{\frac{\lambda x^2}{2}},$$

$$g(y)=C_2e^{\frac{\lambda y^2}{2}},$$

$$\Longrightarrow\quad F(x,y)=Ce^{\frac{\lambda}{2}(x^2+y^2)}.$$

例 4 求方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=x+y$ 满足条件 $\begin{cases}z(x,0)=x\\ z(0,y)=y^2\end{cases}$ 的解 $z(x,y)$,

解 由 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=x+y$

$$\Longrightarrow\quad \frac{\partial z}{\partial x}=xy+\frac{y^2}{2}+\varphi_1(x)$$

$$\Longrightarrow\quad z(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{2}+\varphi(x)+\psi(y)$$

由 $\begin{cases}z(x,0)=x\\ z(0,y)=y^2\end{cases}\Longrightarrow\varphi(0)+\psi(0)=0$

$$\Longrightarrow\quad \varphi(x)+\psi(y)=x+y^2.$$

故 $z(x,y)=\frac{xy}{2}(x+y)+x+y^2$。

例 5 设 $u=f(x,y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ 及条件 $f(x,2x)=x$，$f'_x(x,2x)=x^2$，求 $f''_{xy}(x,2x)$，$f''_{yy}(x,2x)$。

解 因 $u=f(x,y)$，$y=2x$，由复合函数求导法则

$$\Longrightarrow \quad \frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,2x)+2\frac{\partial f}{\partial y}(x,2x),$$

因 $\frac{du}{dx}=\frac{df(x,2x)}{dx}=1$。

$$\Longrightarrow \quad 1=x^2+2f'_y(x,2x) \Longrightarrow \quad f'_y(x,2x)=\frac{1-x^2}{2}$$

又知
$$0=\frac{d^2u}{dx^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,2x)+4\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,2x)+ +4\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,2x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,2x)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,2x) =-\frac{4}{5}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,2x)$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{4}{5}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)_{y=2x}=\varphi(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(x)=\frac{1}{2}+\frac{3x^2}{10},$$

记 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)+\frac{4}{5}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=G(x,y)$，

有 $G(x,2x)=\varphi(x)$

且 $\frac{\partial G}{\partial y}(x,2x)=0$，$\Longrightarrow \quad \varphi'(x)=\frac{\partial G}{\partial x}(x,2x)$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 2x) + \frac{4}{5}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, 2x) = \varphi'(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, 2x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, 2x) = -\frac{4}{3}x,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, 2x) = \frac{5}{3}x,$$

此题对于搞清复合函数求导时，“复合”与“求导”的次序关系是有好处的.

练习 1 （1）设 $u = (xy)^z$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

（2）设 $u = f(t)$，$t = x^2 + y^2 + z^2$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

练习 2 （1）设 $u = f(s,t)$，$s = \varphi(x)$，$t = \psi(y)$，求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$

（2）设 $u = f(x,y,z)$，$x = \varphi(s,t)$，$y = \psi(s,t)$，$z = \omega(s,t)$，求 $\frac{\partial u}{\partial s}$，$\frac{\partial u}{\partial t}$.

练习 3 设 $\begin{cases} x = \varphi(s, t) \\ y = \psi(s, t) \end{cases}$ 满足柯西一黎曼方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial y}{\partial s}, \end{cases}$$

令 $u = f(x,y)$，证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\left(\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2\right).$$

练习 4 （1）设二元可微函数 F 在直角坐标中可写成

$F(x,y)=f(x)g(y)\neq 0$，在极坐标系中可写成 $F(r\cos\theta,$ $r\sin\theta)=h(\theta)$，求 $F(x,y)$ $\left(答:F(x,y)=C_2\left(\frac{x}{y}\right)^{c_1}\right)$.

（2）设二元可微函数 $u=F(x,y)$ 满足方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

证明：$F(x,y)$ 在极坐标中只是 θ 的函数。

练习 5 设 $u=f(x,y)$，且 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,x^2)=x$, $f(x,x^2)=1$，求 $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)$，$\left(答：\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)=-\frac{1}{2}\right)$.

练习 6 设 $u=f(x,y,z)$ 满足方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

作变量替换 $\xi=x$，$\eta=y-x$，$\zeta=z-x$，求上述方程的解。（答：$u=\varphi(y-x,z-x)$，φ 是任意可微函数）.

2. 隐函数微分法。

例 1 设 $F(x-y,\ y-z)=0$，问在何处存在隐函数 $z=z(x,y)$，并求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 当点 (x,y) 使得 $\partial_2 F\neq 0$ 时存在隐函数。且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial_1 F}{\partial_2 F},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial_2 F-\partial_1 F}{\partial_2 F},$$

由 $\partial_1 F(x-y,y-z(x,y))-\partial_2 F(x-y,y-z(x,y))\frac{\partial z}{\partial x}$

$=0$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-1}{(\partial_2 F)^3}[\partial_{22}F(\partial_1 F)^2+\partial_{12}F\cdot\partial_1 F\cdot\partial_2 F-$$

$$-\partial_{11}F(\partial_2 F)^2].$$

例 2 设

$$\begin{cases} x=\cos\varphi\cos\psi \\ y=\cos\varphi\sin\psi \\ z=\sin\varphi \end{cases}$$

问在何处存在隐函数 $z=z(x,y)$，并求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 考察 $\begin{cases} x=\cos\varphi\cos\psi \\ y=\cos\varphi\sin\psi \end{cases}$,

因 $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\psi)}=-\sin\varphi\cos\varphi,$$

所以，当$\sin\varphi\cos\varphi\neq 0$时存在反函数 $\begin{cases} \varphi=\varphi(x,y) \\ \psi=\psi(x,y) \end{cases}$，代入 $z=\sin\varphi$，得到隐函数 $z=\sin\varphi(x,y)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\cos\varphi)\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\sin\varphi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\cos\varphi\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)$$

再由 $$\begin{cases} x=\cos\varphi\cos\psi \\ y=\cos\varphi\sin\psi \end{cases}\Longrightarrow \frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\cos\psi}{\sin\varphi},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\sin\psi}{\cos\varphi}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\psi\sin^2\varphi+\cos^2\psi\cos^2\varphi}{\sin^3\varphi\cos\varphi}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cos^2\psi}{\sin^3\varphi}.$$

例 3 设 $\begin{cases} x\cos\alpha+y\sin\alpha+\ln z=f(\alpha), \\ -x\sin\alpha+y\cos\alpha=f'(\alpha), \end{cases}$

问在什么条件下能由上式确定隐函数$\begin{cases} z=z(x,\ y) \\ \alpha=\alpha(x,\ y), \end{cases}$ 并证明：$z(x,y)$ 满足方程 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=z^2$。

解 易知当$f''(\alpha)\neq -x\cos\alpha-y\sin\alpha$时能确定隐函数$z=z(x,y)$，$\alpha=\alpha(x,y)$。代入第一式得

$$x\cos\alpha(x,y)+y\sin\alpha(x,y)+\ln z(x,y)=f(\alpha(x,y))$$

$$\Rightarrow \cos\alpha+(-\sin\alpha)x\frac{\partial\alpha}{\partial x}+(\cos\alpha)y\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$=f'(\alpha)\frac{\partial\alpha}{\partial x}$$

$\Rightarrow$ $\frac{\partial z}{\partial x}=-z\cos\alpha$，同理 $\frac{\partial z}{\partial y}=-z\sin\alpha$，由此即可完成证明。

例 4 设 $u=f(x,y,z,t)$，其中点 (x,y,z,t) 满足方程组

$$\begin{cases} g(y,z,t)=0 \\ h(z,t)=0 \end{cases}$$

问在什么条件下能将u变为x,y的函数 $u=u(x,y)$，并求$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$。

解 当 $\frac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}\neq 0$时，存在隐函数 $\begin{cases} z=z(y) \\ t=t(y)。\end{cases}$ 代入f，得到隐函数 $u=f(x,y,z(y),t(y))$，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dy}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{dt}{dy}.$$

又由 $\begin{cases} g(y,z(y),t(y))=0 \\ h(z(y),t(y))=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial y}+\dfrac{\partial g}{\partial z}\dfrac{dz}{dy}+\dfrac{\partial g}{\partial t}\dfrac{dt}{dy}=0 \\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\dfrac{dz}{dy}+\dfrac{\partial h}{\partial t}\dfrac{dt}{dy}=0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dy}=\frac{-\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial t}}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}, \qquad \frac{dt}{dy}=\frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial h}{\partial z}}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}$$

所以 $$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\dfrac{\partial(h,f)}{\partial(z,t)}}{\dfrac{\partial(g,h)}{\partial(z,t)}}.$$

练习 1 设 $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1 \end{cases}$，问在何处存在隐函数 $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x=x(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases}$，并求它们的一阶偏导数。

练习 2 设 $z=y+x\varphi(z)$，问在什么条件下能确定隐函数 $z=z(x,y)$，并证明：隐函数满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi^2(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

此方程是拉格朗日方程 $\dfrac{\partial^n u}{\partial x^n}=\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\left(\varphi^n(z)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)$ 当 $n=2$ 时的特殊情形。

练习 3 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，且点 (x,y,z) 满足方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$。 (*)

(1) 问在什么条件下能由方程（*）确定隐函数 $z=z(x,y)$，并求 $f'_x(1,1,1)$ （答：$f'_x(1,1,1)=0$）

(2) 问在什么条件下能由方程（*）确定隐函数

$y=y(x,z)$，并求$f'_x(1,1,1)$　　　（答：$f'_x(1,1,1)=-1$）

练习 4　求下列方程确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数。

（1）　设 $F(x-y,y-z,z-x)=0$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$。

$$\left(\text{答：} \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial_1 F-\partial_3 F}{\partial_2 F-\partial_3 F},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial_2 F-\partial_1 F}{\partial_2 F-\partial_3 F}\right)$$

（2）　设　$F(xz,yz)=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。

$$\left(\text{答：} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-(x\partial_1 F+y\partial_2 F)^{-3}\Big[y^2z^2((\partial_2 F)^2\partial_{11}F-\right.$$
$$-2\partial_1 F\cdot\partial_2 F\cdot\partial_{12}F+(\partial_1 F)^2\partial_{22}F)-$$
$$\left.-2z(x\partial_1 F+y\partial_2 F)(\partial_1 F)^2\Big]\right).$$

练习 5　设函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u=f(x,y,z), \\ g(x,y,z)=0, \\ h(x,y,z)=0. \end{cases}$$

确定，求 $\frac{du}{dx}$。　$\left(\text{答：} \frac{du}{dx}=\frac{\partial(f,g,h)}{\partial(x,y,z)}\Big/\frac{\partial(g,h)}{\partial(y,z)}\right)$

3．　进行变量替换时的微分法。

在含有未知函数 $z=z(x,y)$ 及其偏导数的偏微分方程理论中，常常需要进行变量替换把方程变形以便于研究。最常见的有下面四种变换，其中两种仅对函数的自变量 x,y 进行变换，即设

$$\begin{cases} x=x(\xi,\eta) \\ y=y(\xi,\eta) \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \xi=\xi(x,y) \\ \eta=\eta(x,y), \end{cases}$$

另外两种是把整个变量$\{x,y,z\}$换成新变量$\{\xi,\eta,u\}$，即设

$$\begin{cases} x=x(\xi,\eta,u), \\ y=y(\xi,\eta,u), \\ z=z(\xi,\eta,u), \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \xi=\xi(x,y,z), \\ \eta=\eta(x,y,z), \\ u=u(x,y,z), \end{cases}$$

并要求能确定u是ξ，η的函数，即存在$u=u(\xi,\eta)$．进行上述变换后，就能把原来函数$z=z(x,y)$及其偏导数满足的关系式变换为新函数$u=u(\xi,\eta)$及其偏导数满足的关系式。下面我们利用复合函数及隐函数的微分法则找出它们之间的关系。

(a) 设 $\begin{cases} x=x(\xi,\eta) \\ y=y(\xi,\eta) \end{cases}$， 于是有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \xi}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \xi}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \eta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \eta}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\dfrac{\partial(y,z)}{\partial(\xi,\eta)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\dfrac{\partial(z,x)}{\partial(\xi,\eta)}}{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}}.$$

把上式代入原关系式中就得到新变量$\{\xi,\eta,z\}$及其偏导数之间的新关系式了。

例 1 设 $z=z(x,y)$ 满足方程 $\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,

设 $\begin{cases} x=\dfrac{\xi+\eta}{2} \\ y=\dfrac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$ 有 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}+\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}-\dfrac{\partial z}{\partial \eta} \end{cases}$ 代入原方程，得到

新函数 $z=z(\xi,\eta)$ 应满足的方程为 $\dfrac{\partial z}{\partial \eta}=0$，由这个方程容易求得解为 $z=\varphi(\xi)$，于是原方程的解为 $z=\varphi(x+y)$，其中 φ 是任意可导函数。

(b) 设 $\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y),\end{cases}$ 于是有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}\ \dfrac{\partial \xi}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial \xi}\ \dfrac{\partial \xi}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial \eta}\ \dfrac{\partial \eta}{\partial y},\end{cases}$$ 直接代入原关系式就得到新变量$\{\xi,\eta,z\}$及其偏导数之间的新关系了。

例 2 设 $u=u(x,t)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

设 $\begin{cases}\xi=x-at\\ \eta=x+at,\end{cases}$ 有 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=-a\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+a\dfrac{\partial u}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial \xi}+\dfrac{\partial u}{\partial \eta},\end{cases}$ 代入原方程，

得到新函数 $u=u(\xi,\eta)$ 应满足的方程应为 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$. 由这个方程容易求得解为 $u=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$，于是，原方程的解为 $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$，其中 φ，ψ 是任意的具有二阶偏导数的函数。

(c) 设

$$\begin{cases}x=x(\xi,\eta,u)\\ y=y(\xi,\eta,u)\\ z=z(\xi,\eta,u)\end{cases}$$

第三式左端的 z 是 x,y 的函数，即 $z=z(x,y)$ ，把第一、二式代入第三式，得到

$$z(x(\xi,\eta,u),\ y(\xi,\eta,u))=z(\xi,\eta,u).$$

然后令

$$\Phi(\xi,\eta,u)=z[x(\xi,\eta,u),y(\xi,\eta,u)]-z(\xi,\eta,u)].$$

若 $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\neq 0$，则存在隐函数 $u=u(\xi,\eta)$ ，把它代入 Φ，得到恒等式

$$z[x(\xi,\eta,u(\xi,\eta)),\ y(\xi,\eta,u(\xi,\eta))]=z(\xi,\eta,u(\xi,\eta))$$

然后把上述恒等式分别对 ξ，η 求偏导数，就可找到$\frac{\partial u}{\partial\xi}$，$\frac{\partial u}{\partial\eta}$ 与 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 之间的关系．实际运算时，只要把第三式左端的 z 看成是函数 $z=z(x,y)$ 通过中间变量 x,y 而成为 ξ,η 的复合函数，而把右端的 u 看成 ξ，η 的函数，然后分别对 ξ，η 求偏导数即可。

例 3 设 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2.$$

设 $\begin{cases}x=\eta\\ y=\dfrac{\eta}{1+\xi\eta}\\ z=\dfrac{\eta}{1+u\eta}\end{cases}$. 易知当 $\eta\neq 0$ 时存在隐函数 $u=u(\xi,\eta)$。

由 $\frac{\eta}{1+u\eta}=z(x,y)$ 及 $\begin{cases}x=\eta\\ y=\dfrac{\eta}{1+\xi\eta}\end{cases}$ $\xRightarrow{\text{对}\ \xi\ \text{求导}}$

$$\frac{-\eta^2}{(1+\xi\eta)^2}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\eta^2}{(1+u\eta)^2}\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

由 $\frac{\eta}{1+u\eta}=z(x,y)$ 及 $\begin{cases}x=\eta\\ y=\frac{\eta}{1+\xi\eta}\end{cases}\xrightarrow{\text{对}\ \eta\ \text{求导}}$

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2-z^2\eta^2\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

由此得到与原方程等价的新函数满足的方程

$$\frac{\eta^4}{(1+u\eta)^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$$

即 $\frac{\partial u}{\partial \eta}=0$，易知它的通解为 $u=\varphi(\xi)$，于是原方程通解为

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{x}=\varphi\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{x}\right)$$

其中 φ 是任意的具有一阶偏导数的函数。

(d) 设

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y,z),\\ \eta=\eta(x,y,z),\\ u=u(x,y,z),\end{cases}$$

把 $z=z(x,y)$ 代入第一,二式，得到 $\begin{cases}\xi=\xi(x,y,z(x,y))\\ \eta=\eta(x,y,z(x,y)),\end{cases}$

如果 $\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$，则存在隐函数 $\begin{cases}x=x(\xi,\eta)\\ y=y(\xi,\eta),\end{cases}$ 再代入 $z(x,y)$，就知道存在新函数 $u=u(\xi,\eta)$。再把第一、二式代入上式右端，把它当作第三式左端 u，而把第三式右端中的 z 看成 x,y 的函数，即

$$u[\xi(x,y,z(x,y)),\ \eta(x,y,z(x,y))]=u(x,y,z(x,y))$$

然后分别对 x,y 求偏导就行了。

例 4 设 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

设 $\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x-y,\\ u=xy-z,\end{cases}$ 因 $\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}=-2\neq 0$，故存在隐函数 $u=u(\xi,\eta)$.

由 $xy-z=u$ 及 $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}$ $\xRightarrow{\text{对 } x \text{ 求导}}$

$$y-\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

由 $xy-z=u$ 及 $\begin{cases}\xi=x+y\\ \eta=x-y\end{cases}$ $\xRightarrow{\text{对 } y \text{ 求导}}$

$$x-\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}-\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=1-\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

故原方程等价于新方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}=\dfrac{1}{2}$，易知它的通解为

$$u=\frac{\xi^2}{4}+\xi^2\varphi(\eta)+\psi(\eta)$$

故原方程通解为

$$z=xy-\frac{(x+y)^2}{4}-(x+y)^2\varphi(x-y)-\psi(x-y),$$

其中 φ，ψ 是任意两个具有二阶偏导数的函数。

例 5 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，设 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ 把上述平面直角坐标系下的拉普拉斯方程变换为极坐标形式。

解法 1 有 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial r}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial z}{\partial y}\sin\theta,\\ \dfrac{\partial z}{\partial \theta}=\dfrac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta)+\dfrac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta),\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\ \dfrac{\sin\theta}{r},\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\theta+\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\ \dfrac{\cos\theta}{r},\end{cases}$$ 如何求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$呢？

一种方法是这样的：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\ \frac{\sin\theta}{r}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial \theta}\ \frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial z}{\partial \theta}\ \frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

然后用下法求出 $\dfrac{\partial r}{\partial x}$，$\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$。

由 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 确定反函数 $\begin{cases}r=r(x,y)\\ \theta=\theta(x,y)\end{cases}$ 代入

$$x=r(x,y)\cos\theta(x,y)\Rightarrow\begin{cases}1=\dfrac{\partial r}{\partial x}\cos\theta+\dfrac{\partial \theta}{\partial x}(-r\sin\theta)\\ 0=\dfrac{\partial r}{\partial y}\cos\theta+\dfrac{\partial \theta}{\partial y}(-r\sin\theta)\end{cases}$$

$$y=r(x,y)\sin\theta(x,y)\Rightarrow\begin{cases}0=\dfrac{\partial r}{\partial x}\sin\theta+\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(r\cos\theta)\\[2mm]1=\dfrac{\partial r}{\partial y}\sin\theta+\dfrac{\partial\theta}{\partial y}(r\cos\theta)\end{cases}$$

由此解得 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\cos\theta$，$\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=\dfrac{-\sin\theta}{r}$，$\dfrac{\partial r}{\partial y}=\sin\theta$，$\dfrac{\partial\theta}{\partial y}=\dfrac{\cos\theta}{r}$.

另一种巧妙的方法是这样的（回忆本段开始所讲的窍门）：

把式子 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\dfrac{\partial z}{\partial\theta}\ \dfrac{\sin\theta}{r}$ 中的 z 换成 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\sin\theta}{r}\\&=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\frac{\partial z}{\partial\theta}\ \frac{\sin\theta}{r}\right]\cos\theta-\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\partial z}{\partial r}\cos\theta-\right.\\&\quad\left.-\frac{\partial z}{\partial\theta}\ \frac{\sin\theta}{r}\right]\frac{\sin\theta}{r}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\cos^2\theta-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\ \frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\theta}+\\&\quad+\frac{\sin^2\theta}{r^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{r^2}\ \frac{\partial z}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial r}\ \frac{\sin^2\theta}{r}\end{aligned}$$

同理可得 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，最后得到极坐标形式的平面拉普拉斯方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\ \frac{\partial z}{\partial r}=0$$

解法 2 由 $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}dx=(\cos\theta)dr-(r\sin\theta)d\theta\\dy=(\sin\theta)dr+(r\cos\theta)d\theta\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}dr=(\cos\theta)dx+(\sin\theta)dy\\[2mm]d\theta=\dfrac{-\sin\theta}{r}dx+\dfrac{\cos\theta}{r}dy\end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta = \left(\cos\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\ \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)dx +$$

$$+\left(\sin\theta\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\ \frac{\partial z}{\partial \theta}\right)dy$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\cos\theta - \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\ \dfrac{\sin\theta}{r} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial r}\sin\theta + \dfrac{\partial z}{\partial \theta}\ \dfrac{\cos\theta}{r} \end{cases}$$ 然后再求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

解法 3 把 $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 代入 $z(x,y)$. 得到

$$\frac{\partial z}{zr} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial z}{\partial y}(r\cos\theta)$$

然后求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$, 得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\theta + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\sin\theta$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\cos\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin\theta\right)\sin\theta$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\sin\theta\cos\theta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\theta$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} -$$

$$-r\frac{\partial z}{\partial r}$$

由此得到 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\equiv\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}$.

例 6 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$,

设

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi, \end{cases}$$

把上述空间直角坐标系下的拉普拉斯方程变换为球坐标形式

解 球坐标变换可看成下面两个变换的复合：

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \\ z=z; \end{cases}\qquad \begin{cases} z=r\cos\varphi, \\ \rho=r\sin\varphi, \\ \theta=\theta, \end{cases}$$

作第一个变换时，利用上题结果得到柱坐标形式的拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

对此方程再作第二个变换，它相当于把直角坐标（z，ρ）与极坐标（r，φ）进行变换，所以有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

现在要把 $\frac{\partial u}{\partial \rho}$ 求出来，事实上，

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\varphi, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial \rho}(r\cos\varphi)-\frac{\partial u}{\partial z}(r\sin\varphi), \end{cases}$$

解之得 $\dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{\partial u}{\partial r}\sin\varphi+\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}\ \dfrac{\cos\varphi}{r}$，最后得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\varphi}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}+$$

$$+\frac{\cos\varphi}{r^2\sin\varphi}\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

练习 1 已知 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

利用变换 $\begin{cases}x=e^{\xi}\\ y=e^{\eta}\end{cases}$ 把上述方程变为新函数 $z=z(\xi,\eta)$ 的方程

$$\left(答：a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+b\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0\right)$$

练习 2 已知 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{2}\ \frac{\partial z}{\partial y}\qquad (y>0)$$

利用变换 $\begin{cases}\xi=x-2\sqrt{y},\\ \eta=x+2\sqrt{y}\end{cases}$ 把上述方程变为新函数 $z=z(\xi,\eta)$ 的方程。

$$\left(答：\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}=0\right)$$

练习 3 已知 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$$

利用变换

$$\begin{cases}x=\sin\xi,\\ y=\sin\eta,\\ z=e^{u},\end{cases}$$

把上述方程变为新函数 $u=u(\xi,\eta)$ 的方程。

$$\left(答：\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)^2=0\right)$$

练习 4 已知 $z=z(x,y)$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

利用变换

$$\begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=\dfrac{y}{x},\\ u=\dfrac{z}{x},\end{cases}$$

把上述方程变为新函数 $u=u(\xi,\ \eta)$ 的方程。

$$\left(答：\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0\right)$$

§ 3 微分学理论

微分学理论主要是隐函数与反函数理论，其次是中值定理与泰勒公式。

例 1 设

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0,\\ F_2(x,y,u,v)=0,\end{cases}$$

其中 F_1，$F_2\in C^{(1)}$，记 $P_0=(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 由隐函数定理知，如果 $I=\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,v)}(P_0)\neq 0$，$F_1(P_0)=F_2(P_0)=0$，则存在点 P_0 的邻域，在其中能确定唯一的隐函数 $\begin{cases}u=u(x,y)\ ,\\ v=v(x,y)\ ,\end{cases}$ 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{I_1}{I},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{I_2}{I},\ \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{I_3}{I},\ \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{I_4}{I}.$$

其中 $I_1=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}$, $I_2=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}$, $I_3=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}$,

$I_4=\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}$.

下面我们要利用代数知识及向量工具把隐函数的偏导数公式写得更简洁些。

记 $\vec{x}=(x,y)$, $\vec{u}=(u,v)$,

$$\vec{F}(\vec{x},\vec{u})=(F_1(\vec{x},\vec{u}),\ F_2(\vec{x},\vec{u})),$$

$$\vec{f}(\vec{x})=(u(\vec{x}),v(\vec{x}))$$

则隐函数定理是说，当 $\vec{F}(\vec{x},\vec{u})=0$ 且满足一定条件时存在隐函数 $\vec{u}=\vec{f}(\vec{x})$。

记

$$[\vec{f}']=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{bmatrix},\qquad [\vec{F}'_x]=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y}\end{bmatrix},$$

$$[\vec{F}'_u]=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v}\\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v}\end{bmatrix}$$

我们要证明：

$$[\vec{f}']=-[\vec{F}'_u]^{-1}[\vec{F}'_x] \qquad (*)$$

其中 $[\vec{F}'_u]^{-1}$ 是矩阵 $[\vec{F}'_u]$ 的逆阵。

事实上，容易算得

$$[\vec{F}'_{\vec{u}}]^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\dfrac{\partial F_2}{\partial v}}{I} & \dfrac{-\dfrac{\partial F_1}{\partial v}}{I}\\ \dfrac{-\dfrac{\partial F_2}{\partial u}}{I} & \dfrac{\dfrac{\partial F_1}{\partial u}}{I}\end{bmatrix}.$$

然后利用矩阵乘法即得（*）式。

例 2 我们要利用代数及向量工具以及隐函数理论把光滑曲面 S 在三种不同形式（显示式，隐示式，参数式）下的切平面方程统一为一个公式。

(*a*) 设曲面 S 有参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\\ z=\omega(u,v)\end{cases}$$

记 $\vec{u}_0=(u_0,v_0)$，当 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)\neq 0$ 时，曲面 S 在点 (x_0,y_0,z_0) 存在切平面，它的方程为

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)(x-x_0)+\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)(y-y_0)+$$
$$+\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)(z-z_0)=0 \qquad (1)$$

引入一个新函数

$$\Phi(x,y,z)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)[z-\omega(\varphi^{-1}(x,y),\psi^{-1}(x,y))]$$

记 $\vec{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ $\quad \Phi'(\vec{x}_0)=\left(\dfrac{\partial\Phi}{\partial x},\dfrac{\partial\Phi}{\partial y},\dfrac{\partial\Phi}{\partial z}\right)(\vec{x}_0)$，

$$\vec{x}-\vec{x}_0=\begin{pmatrix}x-x_0\\ y-y_0\\ z-z_0\end{pmatrix}.$$

我们要证明：（1）式可写成下式

$$\Phi'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)=0 \qquad (2)$$

证 有

$$\Phi'(\vec{x}_0)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)\left(-\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\right.$$

$$\left.-\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y},\ 1\right)$$

下面要计算 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

因 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{u}_0)\neq 0$, 由 $\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\end{cases}$ 存在隐函数 $\begin{cases}u=\varphi^{-1}(x,y)\\ v=\psi^{-1}(x,y),\end{cases}$ 再代入 $\begin{cases}x=\varphi(u,v)\\ y=\psi(u,v)\end{cases}$, 然后分别对 x, y 求导. 就可求得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial x}{\partial v}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},$$

于是

$$\Phi'(\vec{x_0}) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{u_0})\left(\frac{\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\ \frac{\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}},\ 1\right)(\vec{u_0})$$

$$= \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(\vec{u_0}),\ \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(\vec{u_0}),\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\vec{v_0})\right)$$

由此即得（2）式。

(b)　设曲面 S 有隐示方程 $\Phi(x,y,z)=0$，它的切平面方程为

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}(\vec{x_0})(x-x_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(\vec{x_0})(y-y_0)+\frac{\partial\Phi}{\partial z}(\vec{x_0})(z-z_0)$$
$$=0$$

容易把它改写成（2）式。

(c)　设曲面 S 为显示方程 $z=f(x,y)$。它的切平面方程为

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)-(z-z_0)$$
$$=0.$$

引进新函数 $\Phi(x,y,z)=z-f(x,y)$

则

$$\Phi'(\vec{x_0}) = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \frac{\partial\Phi}{\partial y},\ \frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)(\vec{x_0})$$

$$= \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0),\ 1\right)$$

由此易知上述方程亦可改写成（2）式。

这样，我们就把三维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中光滑曲面 S 的切平

面方程统一为一个公式：

$$\Phi'(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)=0.$$

例 3 若 $f(x,y)$ 是区域 $G\subset \mathbf{R}^2$ 上的可微函数，且 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$，$(x,y)\in G$，则 $f(x,y)=$ 常数，$(x,y)\in G$。

证 因 G 是区域，任取 G 中两点 $\vec{x}_1=(x_1,y_1)$，$\vec{x}_2=(x_2,y_2)$，一定存在一条连结它们的且位于 G 中的折线段 l_i $(i=1,2,\cdots,m)$，端点为 $\vec{a}_i$，$\vec{a}_{i+1}$，且 $\vec{a}_1=\vec{x}_1$，$\vec{a}_{m+1}=\vec{x}_2$，在每个 l_i 上应用中值定理，得到

$$f(\vec{x}_1)=f(\vec{a}_2)=f(\vec{a}_3)=\cdots=f(\vec{a}_{m+1})=f(\vec{x}_2).$$

故 $f(\vec{x})=$ 常数，$\forall\vec{x}=(x,y)\in G$。

例 4 设 $\begin{cases}u=g_1(x,y)\\v=g_2(x,y)\end{cases}$ 是定义在凸区域 D 上的可微函数，且 $\forall(x,y)\in D$，$\forall(h_1,h_2)\neq 0$，有

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}h_1h_1+\frac{\partial g_1}{\partial y}h_1h_2+\frac{\partial g_2}{\partial x}h_2h_1+\frac{\partial g_2}{\partial y}h_2h_2>0$$

求证：$\forall(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ 有 $g_1(x_1,y_1)\neq g_1(x_2,y_2)$ 或 $g_2(x_1,y_1)\neq g_2(x_2,y_2)$。

证 采用反证法，假若存在两点 $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$。使得 $g_1(x_1,y_1)=g_1(x_2,y_2)$，$g_2(x_1,y_1)=g_2(x_2,y_2)$

构造一个新函数

$$f(x,y)=[g_1(x,y)-g_1(x_1,y_1)]h_1+[g_2(x,y)-g_2(x_1,y_1)]h_2$$

其中 $h_1=x_2-x_1,h_2=y_2-y_1$。由假设知 $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$

$=0$. 由题设知 D 是凸区域，故连结两点 (x_1,y_1)，(x_2,y_2) 的直线段 l 位于 D 中，于是由中值定理知

$$0=f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)h_2.$$

其中点 (ξ,η) 位于直线段 l 上，但

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)h_1+\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta)h_2\\&=\frac{\partial g_1}{\partial x}(\xi,\eta)h_1h_1+\frac{\partial g_1}{\partial y}(\xi,\eta)h_1h_2+\frac{\partial g_2}{\partial x}(\xi,\eta)h_2h_1+\\&\quad+\frac{\partial g_2}{\partial y}(\xi,\eta)h_2h_2\end{aligned}$$

这与题设矛盾.

引进向量记法，会使我们对此题含义更清楚些.

记 $\vec{x}(x,y)$，$\vec{u}=(u,v)$，$\vec{g}(\vec{x})=(g_1(x,y),\ g_2(x,y))$

$\vec{h}=(h_1,h_2)$，$t_j=\begin{cases}x,j=1\\y,j=2\end{cases}$，于是此题可写成：

若函数 $\vec{g}$ 在凸区或 D 上可微，且 $\forall\vec{x}\in D$，$\forall\vec{h}\neq 0$，二次型

$$Q\ (\vec{x},\vec{h})=\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial g_i}{\partial t_j}\ (\vec{x})h_ih_j>0$$

则 g 是单射.

证明中最关键的是构造一个二元实值函数 $f(\vec{x})=[\vec{g}(\vec{x})-\vec{g}(\vec{x}_1)]\cdot\vec{h}$，然后应用中值定理.

例 5 对于向量值函数 $\vec{f}:G\subset \boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$，中值定理一般不成立.

例如一元向量值函数 $\vec{f}(t)=(f_1(t),f_2(t))$的导数定义

为

$\vec{f}'(t)=(f_1'(t),f_2'(t))$，现在设 $\vec{f}$: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}^2$. 定义为 $\vec{f}(t)=(\cos t,\sin t)$，于是有 $f'(t)=(-\sin t,\cos t)$，当 $t_1=0,t_2=2\pi$ 时，下面的中值公式不成立。

$$\vec{f}(t_2)-\vec{f}(t_1)=\vec{f}'(\xi)(t_2-t_1)\qquad \xi\in[0,2\pi]$$

下面我们讨论**多元**向量值函数 $\vec{f}$：$G\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ 较弱形式的中值公式。

我们知道，如果存在同一个线性变换 L：$\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ 使得

$$\lim_{\vec{h}\to 0}\frac{|\vec{f}(\vec{x}+\vec{h})-\vec{f}(\vec{x})-L(\vec{x})\vec{h}|}{|\vec{h}|}=0$$

则称 $\vec{f}$ 在 $\vec{x}$ 可微。称线性变换 $L(\vec{x})$ 为 $\vec{f}$ 在 $\vec{x}$ 的全导数（或微分），记作 $\vec{f}'(\vec{x})=L(\vec{x})$. 对于线性变换 $\vec{f}'(\vec{x})$ 有范数的概念，即

$$\|\vec{f}'(\vec{x})\|=\sup_{|\vec{h}|=1}\{|\vec{f}'(\vec{x})(\vec{h})|\}$$

有了这些概念之后，我们可以叙述下面有用的命题：

设 $\vec{f}$：$G\subset\boldsymbol{R}^n\to\boldsymbol{R}^m$ 是凸开集 G 上的可微函数，且 $\forall\vec{x}\in G$，$\exists M\geqslant 0$，使得 $\|\vec{f}'(\vec{x})\|\leqslant M$，则 $\forall\vec{x}_1$，$\vec{x}_2\in G$，有

$$|\vec{f}(\vec{x}_2)-\vec{f}(\vec{x}_1)|\leqslant M|\vec{x}_2-\vec{x}_1|$$

证 构造 $r(t)=(1-t)\vec{x}_1+t\vec{x}_2$ 及

$\vec{g}(t)=\vec{f}(r(t))$ 有 $\vec{g}'(t)=\vec{f}'(r(t))(\vec{x}_2-\vec{x}_1)$，则 $\forall t\in[0,1]$ 有

$$|\vec{g}'(t)|\leqslant M|\vec{x}_2-\vec{x}_1|$$

由此得证。

练习 1 给定方程 $x^2+y+\sin(xy)=0$。

1° 证明：在点 (0,0) 的邻域内此方程确定唯一的满足 $y(0)=0$ 的连续函数 $y=y(x)$。

2° 讨论函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 附近的可微性。

3° 讨论函数 $y=y(x)$ 在 $x=0$ 附近的升降性。

4° 在点 (0,0) 的充分小邻域内，此方程是否确定唯一的单值函数 $x=x(y)$ 且有 $x(0)=0$?

(提示：由 1°知存在 $\delta>0$，使得在 $(-\delta,\delta)$ 上存在连续函数 $y=y(x)$，由 2°求出 y'，利用方程估计 $|y|$，最后得到：当 $0<x<\delta_0$，$y'_x\geqslant 0$；当 $-\delta_0<x<0$，$y'_x\leqslant 0$，其中 $\delta_0=\min\left\{\frac{\delta}{2},\frac{1}{2}\right\}$。由3°知 4°的结论是否定的。)

§ 4 微分学应用

微分学应用主要是普通极值与条件极值问题。

例 1 如果函数 $f(x,y)$ 在通过点 (x_0,y_0) 的任一直线上取得极值，问 f 在点 (x_0,y_0) 是否一定取得极值? 不一定!

考察函数

$$f(x,y)=(x-y^2)(2x-y^2)$$

易知原点 (0,0) 是 f 的临界点，过原点任作一直线 $l: y=mx$，在 l 上任取一点 $\vec{h}=(h_1,h_2)$，考察

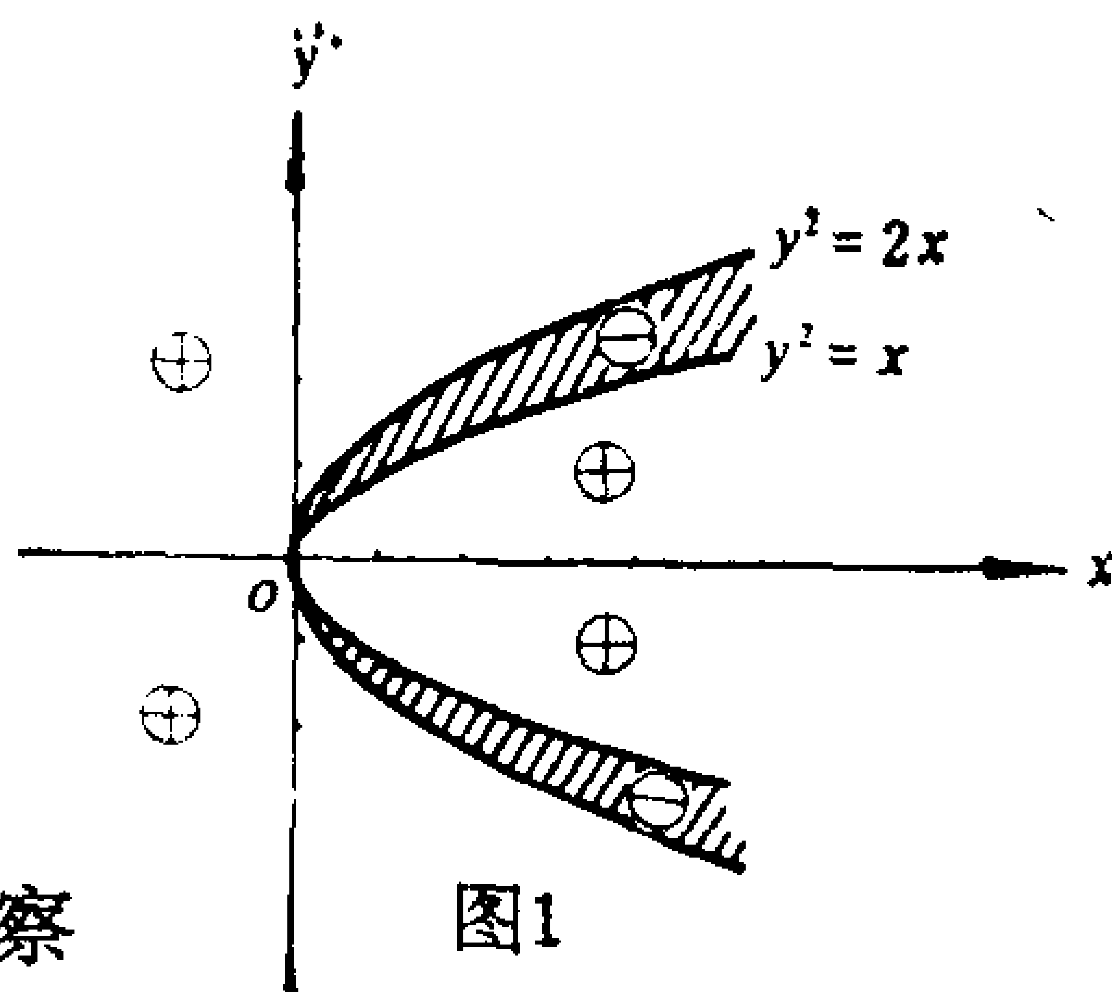


图1

$$\Delta f(\vec{h}) = f(0+h_1, 0+h_2) - f(0,0)$$
$$= h_1^2(1-m^2h_1)(2-m^2h_1)$$

易知对任意的 m，当 $|\vec{h}|$充分小且 $\vec{h} \neq 0$ 时，有$\Delta f(\vec{h})>0$，即 f 在通过原点的任一直线上取得极小值.

因$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) \cdot \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 = 0$，故普通极值的充分判别法失效. 在原点任一邻域内总存在点 $\vec{h}_1 = (h_1', h_2')$，其中 $h_2'^2 = 4h_1'$；又存在点 $\vec{h}_2 = (h_1'', h_2'')$，其中 $h_2''^2 = \dfrac{3}{2}h_1''$，使得$\Delta f(\vec{h}_1)>0$，$\Delta f(\vec{h}_2)<0$，故 f 在原点无极值.

要注意，虽然二次型 $Q(\vec{h}) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h_1^2 = 4h_1^2 \geqslant 0$，但总存在 $\vec{h}_0 = (0, h_2) \neq 0$，使得 $Q(\vec{h}_0) = 0$，也就是说，对一切 $\vec{h} \neq 0$，不能断定 $Q(\vec{h})>0$，因而不能断定 f 在原点取得极值.

例 2 求函数 $f(x,y) = \sin x \sin y \sin(x+y)$ 在区域 $D = \{(x,y) | x \geqslant 0, y \geqslant 0, x+y \leqslant \pi\}$上的最大、最小值.

解 因 D 是有界闭域，故连续函数 f 在 D 上能取到最大、最小值. 又当点 (x,y) 在D 的边界上时，$f(x,y) = 0$；当点 $(x,y) \in D$ 时，$f(x,y) \geqslant 0$，所以 f 在D 的边界上取到最小值 $f(x,y) = 0$，在 D 的内部取到最大值，易知 f 在 D 的内部有唯一的临界点$\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right)$，所以 f 在 D 上的最大值为 $f\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

注意，此例中，f 在 D 的内部仅有一个临界点，我们能不能象单元函数那样（指仅有一个临近点的情形），不管 f 在边界上的值就断定此临界点必是 f 的最值点呢？不能！例如

$$f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2,$$

$$(x,y)\in D=[-5,5]\times[-1,1]$$

易知 f 在 D 的内部仅有一个临界点 $(0,0)$，且它是 f 的极大值点，极大值为 $f(0,0)=0$，但 f 在 D 上的最大值不是0，而是 $f(5,0)=25$。

例 3 设三个正实数的和恒为常数，问它们取何值时其乘积最大？

解 设三个正实数为 x,y,z，问题归结为求函数

$$f(x,y,z)=xyz$$

在条件 $\quad x+y+z=c$

下的最大值，即求函数

$$\varphi(x,y)=xy(c-x-y)$$

在 $D=\{(x,y)|\,x>0,y>0,x+y<c\}$ 上的最大值。

因 D 是开区域，因而连续函数 f 在 D 上不一定取到最大值。这只要把 D 的边界添加进去得到有界闭区域 $\overline{D}=\{(x,y)|\,x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant c\}$，则 f 在 $\overline{D}$ 上一定取到最大值，又 f 在 D 的边界上的值为 0，而 f 在 D内部的值皆大于 0，故 f 在 D 上一定取到最大值。

易求出 φ 有唯一的临界点$(x_0,y_0)=\left(\dfrac{c}{3},\dfrac{c}{3}\right)$，且

$$AC-B^2=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x_0,y_0)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(x_0,y_0)-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\right)^2$$

$$=\frac{c^2}{3}>0.$$

故 φ 在点 (x_0,y_0) 取到极大值也是最大值，最大值为

$$f\left(\frac{c}{3},\frac{c}{3}\right)=\frac{c^3}{27}.$$

此题有下面一些应用

(i) 由 $f(x,y,z)=xyz\leqslant\left(\frac{c}{3}\right)^3\Rightarrow\sqrt[3]{xyz}\leqslant\frac{x+y+z}{3}$,

一般地可证明著名的不等式：

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad x_i>0,\quad i=1,2\cdots,n.$$

(ii) 求周长为常数的一切三角形中面积最大的三角形。

边长为 x,y,z 的三角形面积为

$S(x,y,z)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}$，其中 $x+y+z=2p$，

所述问题就是求函数

$$f(x,y)=\sqrt{p(p-x)(p-y)(x+y-p)}$$

在 $D=\{(x,y)|\ 0<x<p,\ 0<y<p,\ p<x+y<2p\}$ 上的最大值，容易证明，上述问题等价于求函数

$$\varphi(x,y,z)=(p-x)(p-y)(p-z)$$

在条件

$$(p-x)+(p-y)+(p-z)=p$$

下的最大值，由例 3 知，当 $x=y=z=\frac{2p}{3}$ 时，φ 取到最大值，亦即周长一定的三角形中，等边三角形面积最大。

例 4 给定平面 R^2 上三个不同的点 (x_i,y_i) $(i=1,2,3)$，求一个点 (x,y)，使得它与这三个点的距离平方和为最小，即求函数

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{3}[(x-x_i)^2+(y-y_i)^2]$$

在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的最小值．易知 f 在全平面上有唯一临界点

$$(x_0,y_0)=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

我们要证明：这个点就是 f 在全平面上的最小值点．

易知，无论 $x\to\infty$ 或 $y\to\infty$ 或 $(x,y)\to\infty$ 都有 $f(x,y)\to+\infty$，这就是说，存在一个圆 $U_R(0)=\{(x,y)|\,x^2+y^2\leqslant R^2\}$，使得 $(x_0,y_0)\in U_R(0)$，当 $(x,y)\notin U_R(0)$ 时有 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，因 f 在有界闭域 $U_R(0)$ 上连续，因而在某点 (x^*,y^*) 取到最小值，又当 $(x,y)\notin U_R(0)$ 时有

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)\geqslant f(x^*,y^*)$$

故点 (x^*,y^*) 是 f 在全平面 $\boldsymbol{R}^2$ 上的最小值点，因而也是 f 的临界点，而 f 只有一个临界点，故 $(x^*,y^*)=(x_0,y_0)$．

例 5 求二元函数 $f(x,y)=xy$ 在圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 上的最大、最小值．

构造拉格朗日函数

$$L(x,y,z)=xy+\lambda((x-1)^2+y^2-1)$$

解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda(x-1)=0,\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2\lambda y=0,\\[2mm]\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-1)^2+y^2-1=0,\end{cases}$$

得 $\lambda_1=0$，$\lambda_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\lambda_3=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，且 $x=\dfrac{4\lambda^2}{4\lambda^2-1}$，

$$y=\frac{-2\lambda}{4\lambda^2-1}.$$

因此 L 有三个临界点

$$P_1=(0,0),\quad P_2=\left(\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad P_3=\left(\frac{3}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$$

显然点 P_1不是 f 在圆周上的极值点，而 f 在圆周上一定取到最大、最小值，故只能在点 P_2, P_3取到，又因$f(P_2)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，$f(P_3)=\frac{-3\sqrt{3}}{4}$，故点 P_2与P_3分别是 f 在圆周上的最大与最小值点。

另一种方法是把圆周改换为参数方程，即设

$$\begin{cases}x=1+\cos t,\\ y=\sin t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant\pi.$$

于是问题等价于求一元函数

$$\varphi(t)=\sin t(1+\cos t),$$

在 $[0,\pi]$ 上的最小、最大值。

例 6 求三维空间 R^3的原点 $(0,0,0)$ 到曲面 S：

$$(x-y)^2-z^2=1$$

的最短距离。即求函数

$$f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

在条件

$$(x-y)^2-z^2-1=0$$

下的最小值。亦即求 $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在上述条件下的最小值。

设

$$L(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+\lambda((x-y)^2-z^2-1)$$

得两个临界点为

$$P_1=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right),\ P_2=\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

下面我们来判断它们是不是最小值点。易知直线 l：$\begin{cases}x-y=1\\ z=0\end{cases}$ 在曲面 S 上，而 l 是无界集，故曲面 S 也是无界集，易知函数值 $g(x,y,z)$ 构成的集 A 无上界，故无最大值，又 $g(x,y,z)>0$，故集 A 有下界，设 $\alpha=\inf A>0$，由下确界性质知，存在数列 $g(x_k,y_k,z_k)\in A$，其中点列 $\vec{x}_k=(x_k,y_k,z_k)\in S$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}g(x_k,y_k,z_k)=\alpha$。因 $\lim\limits_{(x,y,z)\to\infty}g(x,y,z)=+\infty$，故点列 $\{\vec{x}_k\}$ 为有界点列，于是由波尔察诺定理知存在收敛点列 $(x_{k_l},y_{k_l},z_{k_l})\to(x_0,y_0,z_0)\in S$，$(l\to\infty)$ 故 $\alpha=g(x_0,y_0,z_0)$，即点 (x_0,y_0,z_0) 是 g 的最小值点，由拉格朗日乘数法知点 (x_0,y_0,z_0) 必是点 P_1 与 P_2 中的一个，又因 $g(P_1)=g(P_2)=\frac{1}{2}$，故原问题的最短距离为

$$f(x_0,y_0,z_0)=\sqrt{g(x_0,y_0,z_0)}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

例 7 用条件极值理论证明代数的一个定理：任何一个实对称矩阵一定存在一个实特征根。

设 $A=[a_i^j]$ 是实对称矩阵，$a_i^j=a_j^i, i,j=1,2,\cdots,n$。记 $\vec{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，我们考察实二次型

$$f(\vec{x})=\sum_{i,j=1}^{n}a_i^jx_ix_j$$

在单位球面 $S=\left\{\vec{x}\ \middle|\ \sum_{i=1}^{n}x_i^2=1\right\}$ 上的最大、最小值。

设

$$L(\vec{x},\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_i^jx_ix_j-\lambda\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1\right)$$

解方程组

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=2\left(\sum_{j=1}^{n}a_i^jx_j-\lambda x_i\right)=0 \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-1=0$$

由此得到

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_i^jx_ix_j-\lambda=0，\text{即} f(\vec{x})=\lambda.$$

以及

$$\sum_{j=1}^{n}a_i^jx_j=\lambda x_i \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

即

$$(\lambda I-A)X=0$$

其中 $X=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$.$I$ 是单位阵.上式表明：λ 是矩阵 A 的特征根，X 是 A 的属于 λ 的一个特征向量。因 f 在有界闭集 S 上连续，故 f 必定取到最大、最小值，而 f 的极值点一定满足方程 $(\lambda I-A)X=0$，因此，方程 $(\lambda I-A)X=0$ 一定有解 X,λ，且有 $f(\vec{x})=\lambda$，这就证明了本题。

例 8 求满足方程 $z^2+xyz-x^2-xy^2=9$ 的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

令 $f(x,y,z)=z^2+xyz-x^2-xy^2-9$，因

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

所以极值必要条件为

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}=yz-2x-y^2=0,\\ \frac{\partial f}{\partial y}=x(z-2y)=0.\end{cases}$$

又 $z=z(x,y)$ 应满足方程

$$z^2+xyz-x^2-xy^2-9=0,$$

由上面三个方程求出六个临界点：

$P_1=(0,0,3)$，$P_2=(0,0,-3)$，$P_3=(0,3,3)$，$P_4=(0,-3,-3)$，$P_5=(1,\sqrt{2},2\sqrt{2})$，$P_6=(1,-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$．

且易知在这些点处$\frac{\partial f}{\partial z}\neq 0$，因此由隐函数存在定理知道在这些点处隐函数 $z=z(x,y)$ 是存在的，经过计算有

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2}{2z+xy},\quad AC-B^2=\frac{4x-(2y-z)^2}{(2z+xy)^2}$$

由此知隐函数 $z(x,y)$ 的极小值点为 $(1,\sqrt{2})$，极大值点为 $(1,-\sqrt{2})$．

例 9 体积 V 为常数时，什么长方体的表面积最小？

设长方体三棱长为 x,y,z。问题就是求函数

$$S(x,y,z)=xy+yz+zx$$

在条件 $$xyz=V$$

下的极值。

利用拉格朗日乘数法易知点 $P_0=(\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V},\sqrt[3]{V})$ 是临界点。下面利用条件极值的充分条件判断点 P_0 是否是 S 的极小值点。有

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}=1+\lambda z,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x\partial z}=1+\lambda y,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial x}=1+\lambda z,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y\partial z}=1+\lambda x,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z\partial y}=1+\lambda x,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z\partial x}=1+\lambda y.$$

所以

$$d^2L=2(1+\lambda z)dxdy+2(1+\lambda x)dydz+2(1+\lambda y)dzdx.$$

因

$$(1+\lambda x)\big|_{P_0}=(1+\lambda y)\big|_{P_0}=(1+\lambda z)\big|_{P_0}=-1.$$

所以

$$d^2L(p_0)=-[(dx+dy+dz)^2-(dx^2+dy^2+dz^2)]$$

由约束条件易知 $dx+dy+dz=0$，故

$$d^2L(P_0)=2(dx^2+dy^2+dxdy)$$

因二次型判别式>0，故 P_0 是 S 的极小值点，它是不是 S 的最小值点呢？把 $V=xyz$ 代入 S，问题变成研究函数

$$\widehat{S}(x,y)=xy+\frac{V}{x}+\frac{V}{y}$$

在 $D=\{(x,y)|\,x>0,y>0\}$ 上是否有最小值点，由于 D 是无界域，$\widehat{S}$ 在 D 上是否存在最小值得不到理论上的保证，需进行讨论。

选取适当的 $\varepsilon>0$，$E>0$，作闭矩形域 $D_{\varepsilon,E}=[\varepsilon,E]\times[\varepsilon,E]$，易知可选取适当的 ε,E，使得函数 $\widehat{S}$ 在 $D_{\varepsilon,E}$ 的外部

与边界上的值大于$\widehat{S}(x_0,y_0)=3\sqrt[3]{V^2}$，又连续函数$\widehat{S}$在有界闭域$D_{\varepsilon,E}$上必存在最小值，且$\lim\limits_{(x,y)\to 0}\widehat{S}(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to\infty}\widehat{S}(x,y)=+\infty$，故$\widehat{S}$在$D$上存在最小值，因此点$(x_0,y_0)$是$\widehat{S}$的最小值点。

注意．利用条件极值的充分判别法判断$d^2L(P_0)$的符号时，必需把dz看成函数的微分，由约束条件找出dx,dy,dz的关系，而不能把dx,dy,dz都看成自变量的微分。否则，可能出现错误。例如此题得到

$$d^2L(P_0)=-[(dx+dy+dz)^2-(dx^2+dy^2+dz^2)]$$

以后，如果把dx,dy,dz都看成自变量的微分，则当$dx+dy+dz=0$时，有$d^2L(p_0)>0$；当$dx=dy=dz$时，有$d^2L(p_0)=-6dx^2<0$，因此上述二次型是不定的，将会误以为S在点P_0无极值。

练习 1　求函数$f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4$在条件$xyz=1$下的极值

（提示：利用[例 3]的不等式，极小值点为$P_1=(1,1,1)$，$P_2=(1,-1,-1)$，$P_3=(-1,-1,1)$，$P_4=(-1,1,-1)$）

练习 2　设$F(x,y,z)$在区域$D\subset\mathbf{R}^3$上有二阶连续偏导数．设$F_z(x,y,z)\neq 0,(x,y,z)\in D$．研究由方程$F(x,y,z)==0$确定的隐函数$z=f(x,y)$取得极值的充分必要条件。

（必要条件：临界点是方程组）

$$\begin{cases}F_x(x,y,z)=0,\\F_y(x,y,z)=0,\\F(x,y,z)=0\end{cases}$$

的解。充分条件：设 $H=F_{xx}F_{yy}-F^2_{xy}$，$A=-\frac{F_{xx}}{F_z}$。

当临界点使得 (1) $H>0, A>0$时，此临界点为极小值点，

$H>0, A<0$ 时此临界点为极大值点。

(2) $H<0$，此临界点不是极值点。

练习 3 问空间曲面

$$z=\frac{1}{2}x^2-4xy+9y^2+3x-14y+\frac{1}{2}$$

在何处有最高点与最低点？

(提示：把方程写成 $z+5=\frac{1}{2}(x-4y+3)^2+(y-1)^2$。

曲面没有最高点，它的最低点出现在 (1,1) 上)

练习 4 利用条件极值方法证明解析几何中点 $P_0=(x_0, y_0, z_0)\in \mathbf{R}^3$到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

第十四章　重积分

重积分是定积分（一重积分）的自然推广，二者之间有与生俱来的共同本性，但在某些方面也各有其特点。通过习作课应让学生掌握它们的共性与个性，以加深对重积分概念及其性质的理解。在讨论重积分的概念及性质时应着重于讨论二重积分。只要搞清楚二重积分，那么三重以至多重积分将没有什么困难，这是因为将二重积分推广到三重乃至多重积分在本质上没有什么新东西。

重积分部分的重点应放在计算和应用上。这是因为有了定积分概念的基础，重积分概念是比较容易理解的。而在计算重积分时由于积分区域是平面、空间甚至是多维空间区域。处理起来就复杂多了，所以应在习作课上加强这方面的练习，以达到熟练计算的目的。

§1　重积分的概念和性质

一、二重积分的定义。

设平面区域 Ω 是可求面积的。函数 $f(x, y)$ 定义在 Ω 上。将区域 Ω 用一曲线网分成有限个可求面积的小区域 $\Delta\Omega_1$，$\Delta\Omega_2$，…，$\Delta\Omega_n$。我们把这些小区域的面积也记作 $\Delta\Omega_i$（$i=1,2,\cdots, n$）。并且记　$d=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i\text{的直径}\}$

在 $\Delta\Omega_i$ 中任取一点（ξ_i，η_i），作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\Omega_i \qquad （称为积分和）.$$

如果存在一个常数 I，对于任意给定的 $\varepsilon>0$。总存在一个数 $\delta>0$，对于 Ω 的任意分法，只要 $d<\delta$ 时，不论 (ξ_i,η_i) 在 $\Delta\Omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上如何选取，恒有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\Omega_i - I\right| < \varepsilon$$

则称 I 为 $f(x,y)$ 在 Ω 上的二重积分（二重黎曼积分）．记作

$$I=\iint_{\Omega} f(x,y)\,d\Omega=\iint_{\Omega} f(x,y)\,dxdy.$$

此时，称 $f(x,y)$ 在 Ω 上可积．

关于以上定义，应让学生与定积分的定义做比较．

1．二重积分的定义区域为平面区域，被积函数为二元函数。定积分的定义区域为区间，被积函数为一元函数。

2．二者都是求积分和的极限．

3．定义中的极限与区域 Ω 的分法与点 (ξ_i,η_i) 的取法无关。这与定积分的定义是一致的．

4．定义中的极限与一般函数的极限不同，严格地说，如果将二重积分定义作

$$I=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\Omega_i$$

是不合适的．

5．在定积分的定义中要求最大的小区间长趋于0时的极限，在二重积分的定义中能否把“d 趋于0”这一条件改

为“$S=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\Omega_i$的面积$\}$趋于0”呢？不行，这是因为$S\to 0$不能保证$\Delta\Omega_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$中任意二点的距离趋于0。

为使学生熟悉二重积分的定义，可在习作课上让学生根据定义计算二重积分。

例1 根据定义计算二重积分

$$I=\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\,dxdy$$

其中$\Omega=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,\ 1\leqslant y\leqslant 3\}$。

解 先承认“在闭域上的连续函数是可积的”这一事实，在此前提下可对区域作特殊分法，为简化计算可用直线族

$$x=1+\frac{i}{n},\quad y=1+\frac{2j}{n}\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

将矩形域Ω分成许多小矩形，每个小矩形长为$\Delta y_j=\dfrac{2}{n}$，宽为$\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$，在每个小矩形中也可取特殊点。例如可取$x_i=$$=1+\dfrac{i}{n}$，$y_j=1+\dfrac{2j}{n}$则有

$$\sum_{i,j=1}^{n}f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j=\sum_{i,j=1}^{n}\left[\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\right]\frac{1}{n}\frac{2}{n}$$

$$=n\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2\frac{2}{n^2}+n\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2\cdot\frac{2}{n^2}$$

$$=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{i}{n}\right)^2+\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(1+\frac{2j}{n}\right)^2$$

$$=\frac{2}{n}\left[n+(n+1)+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^2}+n+\right.$$

$$\left.2(n+1)+\frac{4n(n+1)(2n+1)}{6n^2}\right]$$

$$=\frac{40}{3}+\frac{11}{n}+\frac{5}{3n^2}$$

$$I=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n} f(x_i,y_j)\Delta x_i\Delta y_j=\frac{40}{3}.$$

为验证二重积分的值与区域的分法、点的取法无关，还可以选择不同的分法和取法，例如用直线族 $x=1+\frac{i}{n}$，$y=1+\frac{j}{n}$ $i=1,2,\cdots,n$， $j=1,2,\cdots,2n$ 划分区域，取点(x_i, y_i)。

$x_i=1+\frac{i}{n}$，$y_j=1+\frac{j}{n}$ $i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,2n$。计算结果是一样的。计算过程由学生自己完成。

二、二重积分存在的条件及可积函数类。

二重积分存在条件与定积分存在的条件类似。

1. 必要条件：被积函数在积分域上有界。这一命题如在课上没有证明，应在习作课上让学生自己证明。并举例说明被积函数有界时不一定可积。（即有界并非可积的充分条件）

2. 充要条件：$\lim_{d\to0}(S-s)=0$。

其中S，s分别为达布上和与达布下和。达布定理也可写作

$$\lim_{d\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\Omega_i=0$$

其中 ω_i 为第 i 个小区域上函数 $f(x,y)$ 的振幅。

即 $\omega_i = M_i - m_i$。 M_i，m_i 分别为 $f(x, y)$ 在 $\Delta\Omega$ 上的上下确界。

对于二元函数的达布上（下）和的概念及性质与一元函数类似，但也有不同之处，可引导学生自己判断其异同点。达布定理的证明可在习作课上讲解，也可由学生对照一元的情形自己证明。

3. 以下各函数类是可积的。

(1) 定义在闭区域 Ω 上的连续函数 $f(x, y)$ 是可积的。

(2) 区域 Ω 上的有界函数 $f(x, y)$ 至多在有限条面积为 0 的曲线上不连续，则它在 Ω 上是可积的。这一函数类与定积分中"有有限个间断点的有界函数类"是类似的。可由学生自己做比较。

三、二重积分的性质。

与定积分类似，二重积分有以下性质：

1. 若 $f(x,y)$ 在区域 Ω 上可积，则 $kf(x,y)$ 在 Ω 上也可积，（k 为常数），且有

$$\iint_{\Omega} kf(x, y)dxdy = k\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy.$$

2. 若 $f(x, y)$ 与 $g(x, y)$ 在区域 Ω 上可积，则

$f(x, y) \pm g(x, y)$、$f(x, y)g(x, y)$ 在 Ω 上可积。

3. 若 $f(x, y)$ 在区域 Ω 上可积，将 Ω 任意分为可求面积的两部分 Ω_1，Ω_2，且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \phi$，则

$$\iint_{\Omega} f(x, y)dxdy = \iint_{\Omega_1} f(x, y)dxdy + \iint_{\Omega_2} f(x,y)dxdy.$$

反之，若 $f(x, y)$ 分别在 Ω_1，Ω_2 上可积，则 $f(x,y)$ 在 Ω 上可积，且上式成立。

4. 若 $f(x,y)$，$g(x,y)$ 都在 Ω 上可积，且满足

$f(x,y) \leqslant g(x,y)$，则

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dxdy \leqslant \iint_{\Omega} g(x,y) dxdy.$$

5. 若 $f(x,y)$ 在 Ω 上可积，则 $|f(x,y)|$ 在 Ω 上可积，（反过来不一定成立）。且有

$$\left|\iint_{\Omega} f(x,y) dxdy\right| \leqslant \iint_{\Omega} |f(x,y)| dxdy.$$

6. 若 $f(x,y)$ 在 Ω 上可积，且满足

$$m \leqslant f(x,y) \leqslant M$$

则有

$$mS \leqslant \iint_{\Omega} f(x,y) dxdy \leqslant MS$$

其中 S 是区域 Ω 的面积。

7. 中值定理：若 $f(x,y)$ 在 Ω 上连续，则在 Ω 上存在一点 (x^*, y^*) 使

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dxdy = f(x^*, y^*) \cdot S.$$

二重积分的定义和性质可以很容易地推广到三重积分和多重积分，可以作为练习让学生完成。

例2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积，$g(y)$ 在 $[c, d]$ 上可积。证明 $f(x)g(y)$ 在 D：$\{a, b; c, d\}$ 上可积，且

$$\iint_{D} f(x) g(y) dxdy = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_c^d g(y) dy.$$

证 用分点

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_i<x_{i+1}<\cdots<x_n=b$$
$$c=y_0<y_1<\cdots<y_j<y_{j+1}<\cdots<y_m=d$$
将区域 D 分成 $n\times m$ 个小矩形
$$D_{ij}=\{x_i,\ x_{i+1};\ y_j,\ y_{j+1}\}$$
记 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$

$\Delta y_j=y_{j+1}-y_j \qquad j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1.$

为方便我们也将 D_{ij} 看作相应小矩形的面积。把 $f(x)$ 看作区域 D 上的二元函数。设 $f(x)$ 在 D_{ij} 上的振幅为 ω_{ij}，则在上述分法下，$f(x)$ 在 D_{ij} 的达布大、小和之差为
$$\begin{aligned}S-s&=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\omega_{ij}D_{ij}\\&=\sum_{j=0}^{m-1}\Delta y_j\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\\&=(d-c)\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i\end{aligned}$$
此处 ω_i 是 $f(x)$ 作为 $[a,b]$ 上的一元函数在 $[x_i,\ x_{i+1}]$ 上的振幅，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有
$$\sum_{i=1}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$
故有 $\qquad S-s<\varepsilon.$

由达布定理 $f(x)$ 在区域 D 上可积。

同理可证 $g(y)$ 在 D 上也可积，由于可积函数的乘积仍可积，故 $f(x)g(y)$ 在 D 上可积。容易推知
$$\iint_D f(x)g(y)\,dxdy=\int_a^b f(x)\,dx\int_c^d g(y)\,dy.$$

这题可推广到 n 重积分的情形。

例 3 由例 2 可证明熟知的布尼科夫斯基不等式

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx.$$

证 记 $I=\iint\limits_D [f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2dxdy$

此处 $D=\{a,\ b;\ a,\ b\}$

由例 2 有

$$I=\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(y)dy-2\int_a^b f(x)g(x)dx\int_a^b f(y)g(y)dy$$

$$+\int_a^b f^2(y)dy\int_a^b g^2(x)dx$$

$$=2\int_a^b f^2(x)dx\int_a^b g^2(x)dx-2\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2$$

显然有 $I\geqslant 0$，即得布氏不等式。

在公式中令 $f(x)=\sqrt{h(x)}$，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{h(x)}}$

得到有用的不等式

$$(b-a)^2\leqslant\int_a^b h(x)dx\int_a^b\frac{1}{h(x)}dx \qquad (h(x)>0)$$

例4 设 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{a,b;\ c,d\}$ 上连续，则与定积分类似，积分上限的函数

$$F(x,y)=\int_a^x\int_c^y f(u,v)dvdu$$

可以对积分上限求导，且有

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,y).$$

证 由于积分区域是矩形域，所以二重积分可化为

$$F(x,y)=\int_a^x du\int_c^y f(u,v)dv.$$

$\because$ $f(u,v)$连续

$\therefore$ $\int_c^y f(u,v)dv$ 是 u 的连续函数。

$\therefore$ $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\int_c^y f(x,v)dv$

$\therefore$ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=f(x,\ y).$

同理 $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=f(x,\ y).$

四、在证明函数可积时往往比较困难。在习作课中应引导学生从各个可能的方面考虑证明方法，如应用重积分的定义、性质、已知的重积分存在的条件等。下面再举一例，我们知道如果定义在矩形域

$D=\{a,\ b;\ c,\ d\}$上的二元函数 $f(x,\ y)$的二重积分。

$$\iint_D f(x,\ y)dxdy$$

存在，且 $\int_a^b f(x,y)dx \qquad c\leqslant y\leqslant d$

及 $\int_c^d f(x,\ y)dy \quad a\leqslant x\leqslant b$

存在，则

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

$$=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx.$$

例5 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y^{-2}, & 0<x<y<1, \\ -x^{-2}, & 0<y<x<1, \\ 0 & 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1 \text{ 的其它部分} \end{cases}$$

在 D 上不可积，$D=\{0,\ 1;\ 0,\ 1\}$

证　可以由 $f(x,\ y)$ 的无界性证明结论，也可以考察

$$\int_0^1 f(x,y)dx \qquad (0<y<1)$$

$$=\int_0^y \frac{dx}{y^2}-\int_y^1 \frac{1}{x^2}dx=\frac{x}{y^2}\Big|_0^y+\frac{1}{x}\Big|_y^1=1$$

$$\int_0^1 f(x,y)dy \qquad (0<x<1)$$

$$=\int_0^x -\frac{1}{x^2}dy+\int_x^1 \frac{dy}{y^2}=-\frac{y}{x^2}\Big|_0^x-\frac{1}{y}\Big|_x^1=-1.$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy=\int_0^1 -dx=-1$$

$$\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx=\int_0^1 dy=1$$

由于 $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy\neq\int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$

$\therefore$　$f(x,y)$ 在 D 上二重积分不存在。

§2　重积分的计算

二重积分的计算关键在于化二重积分为二次积分，由于积分区域是平面区域，易于作图，比较直观，所以容易确定积分限。但如何处理才能使计算简单，特别是进行变量替换时往往有一定的技巧性。在习作课中应指出容易出现的错误。并且引导学生多做有典型意义的习题。以达到做题时熟练、正

确、迅速的目的。

三重积分的计算困难在于积分区域是空间区域，情况往往比较复杂，学生缺乏空间想象力，以致对相应的区域做出错误的判断，因而导致计算错误。应当通过练习一方面培养学生的空间想象力，另一方面要使他们能够从积分区域的分析表达式确定积分限。

一、二重积分的计算。

例1 计算二重积分

$$I=\iint\limits_{\Omega}(x+y)\,dxdy \quad \Omega \text{ 是 } y^2=2x,\ x+y=4$$

$x+y=12$ 所围区域。

解法1 （如图1)先求点 A、B、C、D 的坐标，即 $A\ (2,\ 2)$，$B(8,\ 4)$ $C\ (18,\ -6)$，$D\ (8,\ -4)$ 如先对 y 积分，则有

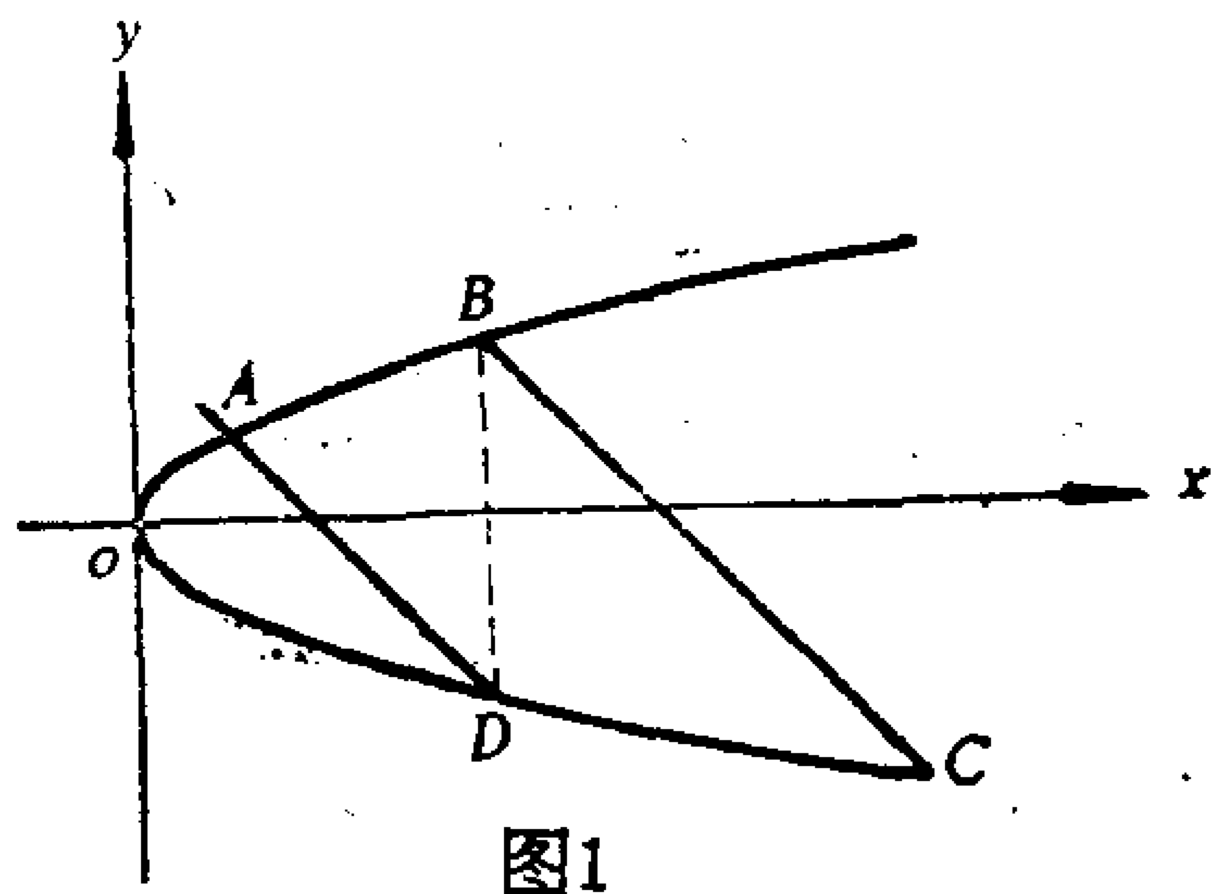


图1

$$I=\int_2^8 dx\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\,dy+\int_8^{18}dx\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\,dy$$

$$=543\frac{11}{15}.$$

解法2 先对x积分，则有

$$I=\int_{-6}^{-4}dy\int_{y^2/2}^{12-y}(x+y)\,dx+$$

$$\int_{-4}^{2}dy\int_{4-y}^{12-y}(x+y)\,dx$$

$$+\int_2^4 dy\int_{y^2/2}^{12-y}(x+y)\,dx$$

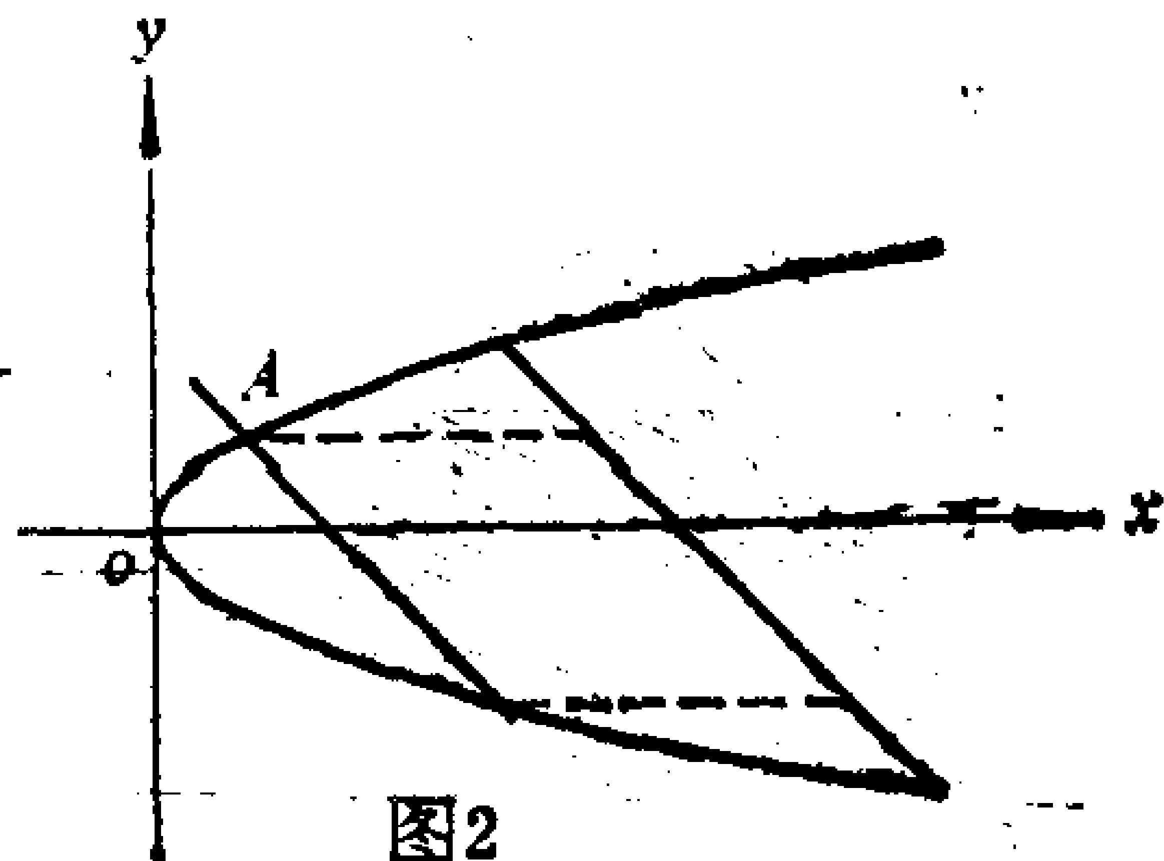


图2

$= 543\frac{11}{15}$.

例2 计算二重积分

$$I=\iint_{\Omega} e^{-x^2}dxdy \quad \Omega \text{ 为 } y=0,\ x=1,\ y=x \text{ 所围的}$$

区域。

解 若先对 x 积分，则

$$I=\int_0^1 dy\int_y^1 e^{-x^2}dx$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，所以不能计算。

若化为

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x e^{-x^2}dy$$

则很容易计算 $I=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$。

以上二例说明在计算二重积分时应注意安排好积分次序，若安排不当，不仅使计算复杂，甚至有时计算不出结果来。

例 3 将逐次积分

$$I=\int_0^1 dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}} f(x,y)dx \quad \text{变换积分次序。}$$

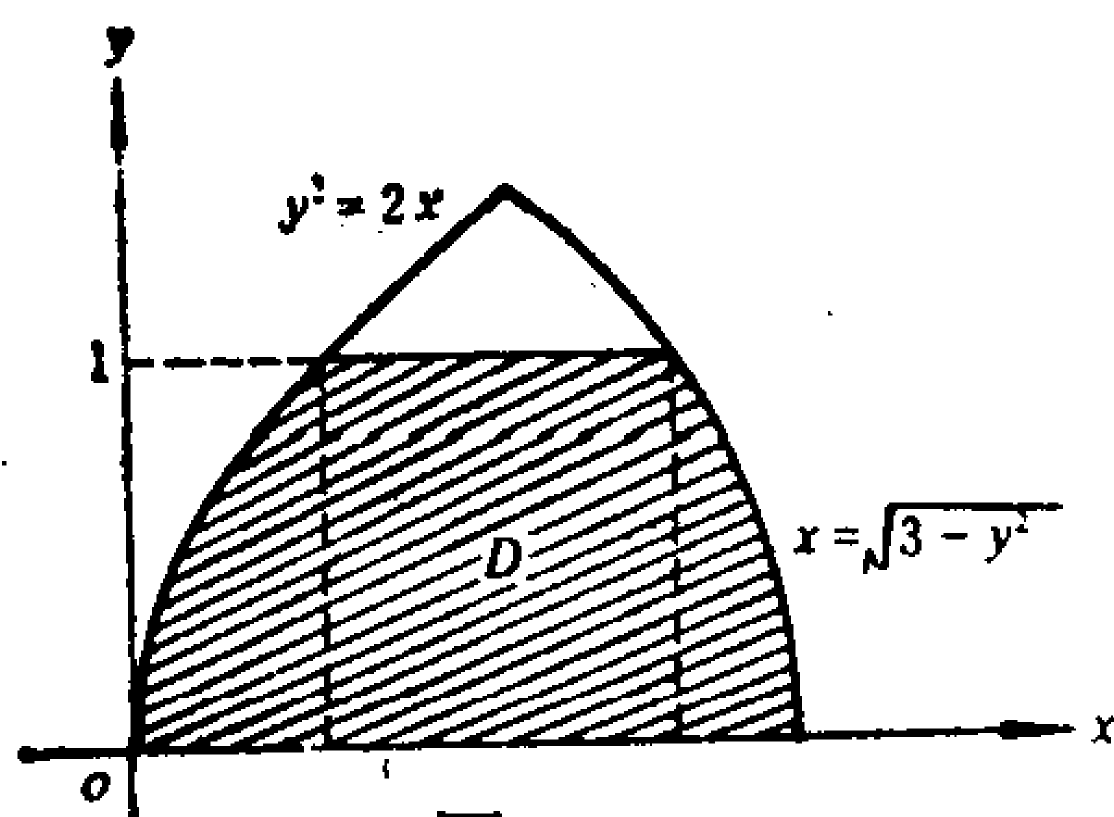


图3

解：积分区域为

D：$0\leqslant y\leqslant 1$

$\frac{1}{2}y^2\leqslant x\leqslant\sqrt{3-y^2}$

如图 3 将 D 分为三部分，得到

$$I=\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_0^{\sqrt{2x}}f(x,y)dy+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}dx\int_0^1 f(x,y)dy+$$

$$+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}}dx\int_0^{\sqrt{3-x^2}}f(x,y)dy.$$

可以看到在计算时需求出曲线间交点的坐标。

例4 计算二重积分 $I=\iint\limits_D xydxdy$。区域D由$x=0$，$y=0$，$x=a\cos^3 t$，$y=a\sin^3 t$ $\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$围成。（图4）

解 D为星形线在第一象限的部分与坐标轴所围区域。按二重积分的计算公式，得

$$I=\int_0^a dx\int_0^{y(x)}xydy$$

此处$y=y(x)$是星形线在直角坐标系之下的方程，实际计算时不必写出$y=y(x)$的具体表示式。这是因为显然有

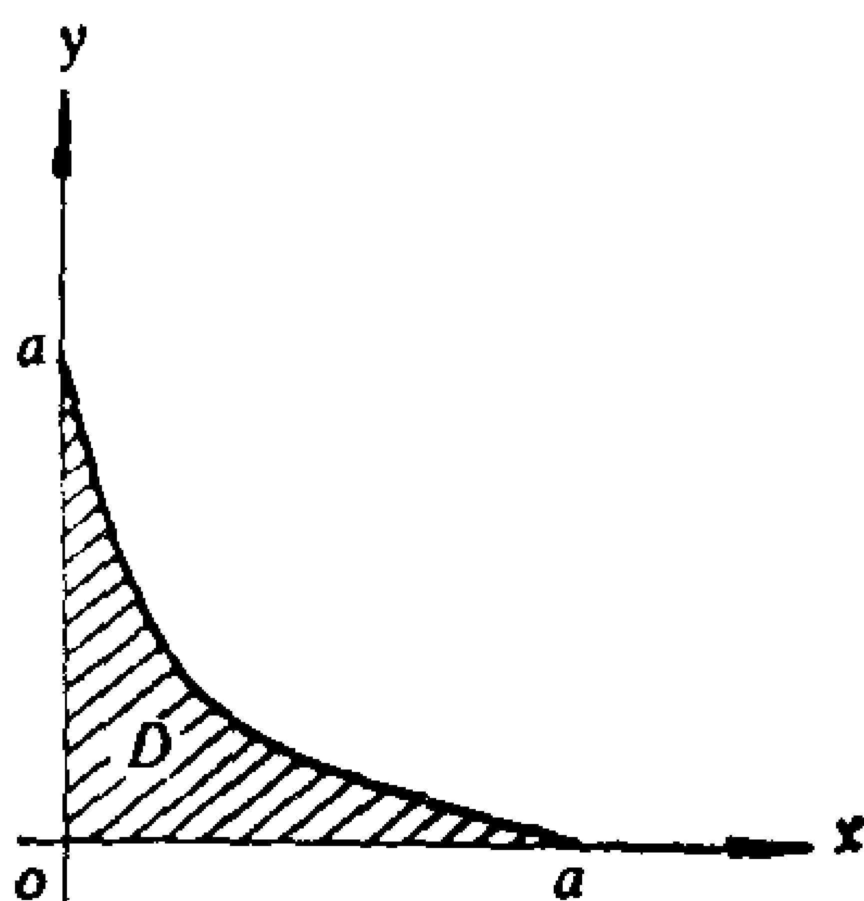


图4

$$I=\frac{1}{2}\int_0^a xy^2(x)dx$$

$$xy^2=a^3\cos^3 t\sin^6 t$$

$$dx=-3a\cos^2 t\sin tdt$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 a^3\cos^3 t\sin^6 t(-3a\cos^2 t\sin t)dt$$

$$=\frac{3}{2}a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 t\sin^7 t\,dt$$

$$=\frac{1}{80}a^4$$

此题在计算时上下限容易颠倒，应予注意。

例 5 将$I=\iint\limits_D (x-y)^n f(y)dydx$ 化为单重积分，其中$f(y)$可积。D是由$y=x_0$，$y=x$，$x=h$（$x_0<h$）所围区域，n为自然数。（图 5）

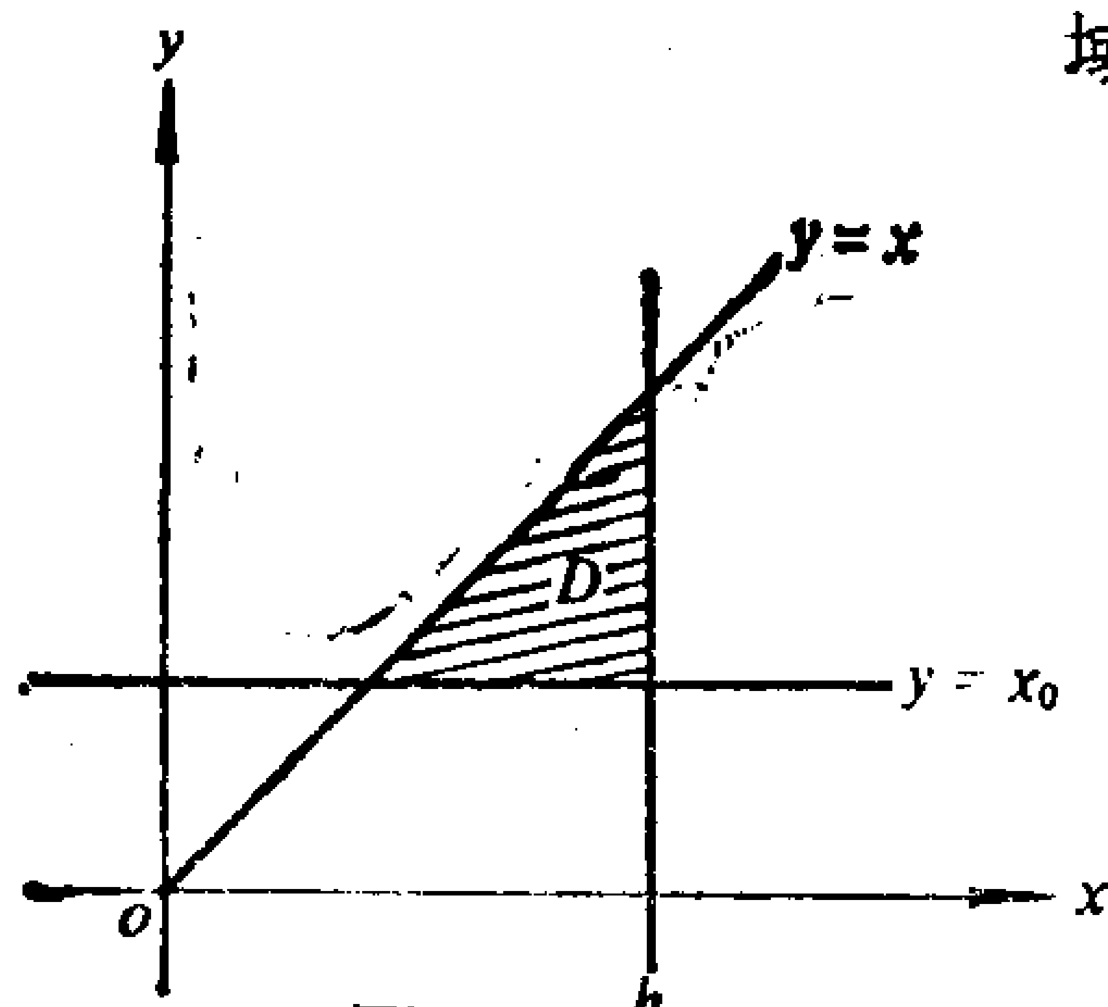


图5

解：如图知

$$I=\int_{x_0}^h f(y)dy\int_y^h (x-y)^n dx$$

$$=\frac{1}{n+1}\int_{x_0}^h (h-y)^{n+1}f(y)dy$$

同时有

$$I=\int_{x_0}^h dx\int_{x_0}^x (x-y)^n f(y)dy$$

所以

$$I=\int_{x_0}^h dx\int_{x_0}^x (x-y)^n f(y)dy=\frac{1}{n+1}\int_{x_0}^h (h-y)^{n+1}f(y)dy$$

下面求

$$I_n(h)=\int_{x_0}^h (h-y)^n f(y)dy$$

显然有

$$\int_{x_0}^h I_n(x)dx=\frac{1}{n+1}I_{n+1}(h)$$

将n换成$n-1$得到

$$I_n(h)=n\int_{x_0}^h I_{n-1}(x)dx$$

重复应用此公式就得到

$$I_n(h)=n!\int_{x_0}^h dx\int_{x_0}^h dx\cdots\int_{x_0}^h f(x)dx$$

以下二重积分可作为习作课的选题

1. 求$I=\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$，其中 D 是由 $x=2$，$y=x$ 及 $xy=1$ 所围区域。 $\left(答：I=\frac{9}{4}\right)$

2. 交换以下积分的次序

(1) $\int_{-7}^{1}dy\int_{2-\sqrt{7-6y-y^2}}^{2+\sqrt{7-6y-y^2}}f(x,y)dx$

(2) $\int_{0}^{1}dy\int_{\frac{1}{2}y^2}^{\sqrt{3-y^2}}f(x,y)dx$

3. 求$I=\iint\limits_D |xy|\,dxdy$。$D$ 为以原点为圆心的单位圆 $\left(答：I=\frac{1}{2}\right)$

4. 求$I=\iint\limits_D y^2dxdy$，其中 D是由x 轴及摆线

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

$(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$ 的第一拱所围的区域。$\left(答：I=\frac{35}{12}\pi a^4\right)$

二、三重积分的计算

三重积分的计算与二重积分一样也是化为累次积分，但比二重积分复杂，原因是积分区域为三维空间区域，这就要求学生具有较丰富的空间想象力。在计算时往往还需比较函数的大小、推算若干对曲面交线的方程，以及求区域的边界在坐标面上的投影等。

将三重积分化为累次积分时可以利用二重积分，一般有两种方法，一种是

$$\iiint_V f(x,y,z)\,dxdydz=\iint_{\sigma_{xy}} dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

这里 σ_{xy} 是空间区域 V 在 xy 坐标面上的投影，通过 σ_{xy} 上任一点 (x,y) 作平行于 z 轴的直线，交空间区域 V 于两点 $(x,y,z_1(x,y))$ ， $(x,y,z_2(x,y))$ $(z_1<z_2)$

计算出 $\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$ 后，剩下的就是计算一个二重积分了。这就是俗称的"穿针法"。

另一种是

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_a^b dz\iint_{\sigma_z} f(x,y,z)dxdy.$$

这里 σ_z 是过 z 轴上任一点 z(z 在 a,b 之间）作平行于 xy 坐标面的平面与空间区域 V 的截面，而 a,b 则是区域 V 在 z 轴方向的最小及最大值。这就是俗称的"切片法"。

为了说明问题，我们分别举例为下。

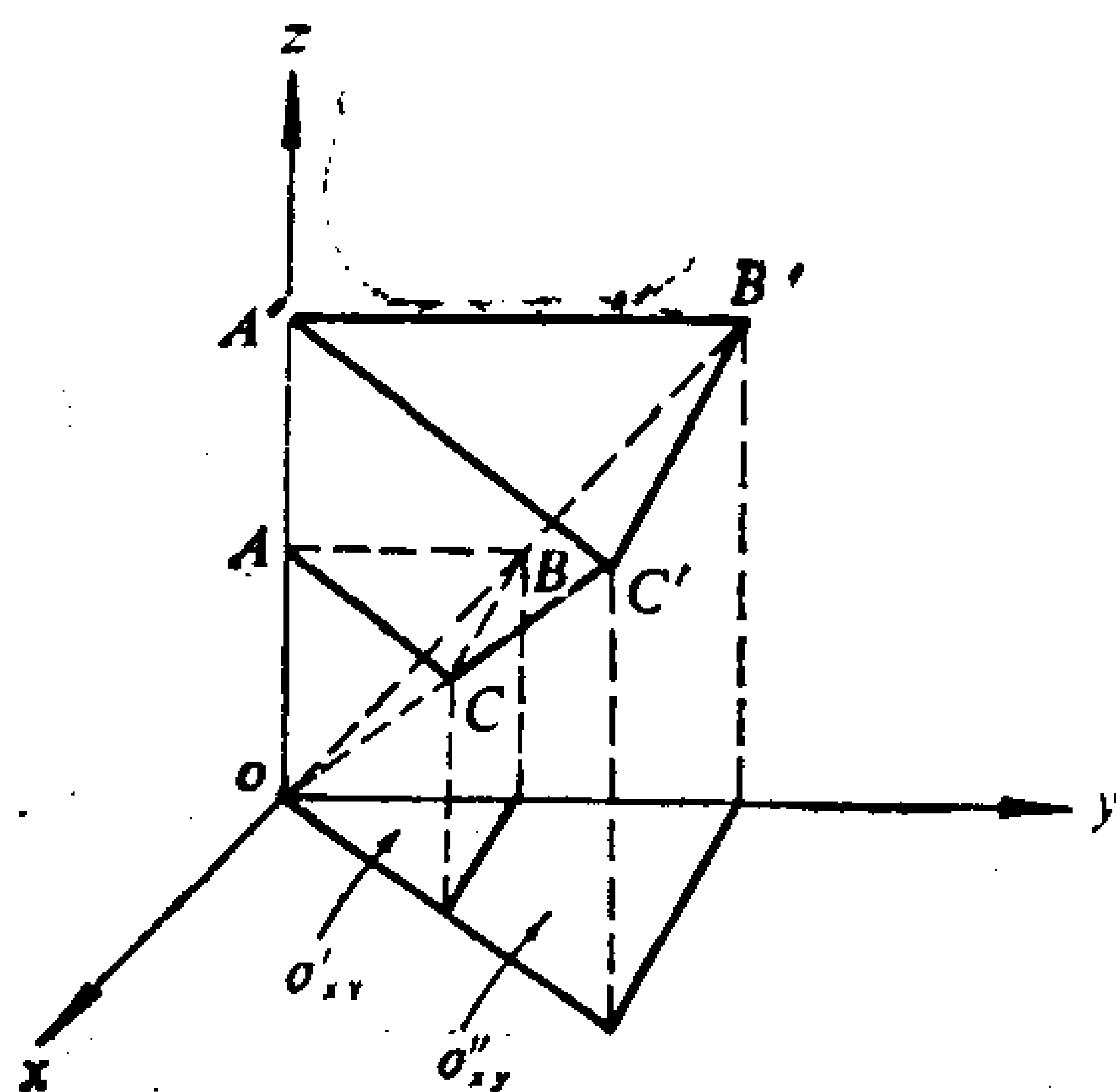


图 6

例 6 计算三重积分

$$I=\iiint_V \frac{dxdydz}{y^2+z^2}$$

其中 V 是棱台，其顶点为 $A(0,0,1)$，$B(0,1,1)$，$C(1,1,1)$，$A'(0,0,2)$，$B'(0,2,2)$，$C'(2,2,2)$。

解 先将 V 在坐标系中画出草图（图 6）

若用第一种方法，则需将 V 分成两部分。

$$I=\iint\limits_{\sigma'_{xy}}dxdy\int_{1}^{2}\frac{dz}{y^{2}+z^{2}}+\iint\limits_{\sigma''_{xy}}dxdy\int_{y}^{2}\frac{dz}{y^{2}+z^{2}}$$

这里 σ'_{xy} 是三角形区域，σ''_{xy} 是梯形区域，如上图。

若用第二种方法。

$$I=\int_{1}^{2}dz\iint\limits_{\sigma_{z}}\frac{dxdy}{y^{2}+z^{2}}$$

这里 σ_z 是取定 z 值时，以 z 为直角边时的等腰直角三角形区域，如图 7。

显然第二种方法计算简便。

但在用第一种方法时如先对 x 积分，则计算也很简便，可让学生自己计算。$\left(\text{答案为}\frac{1}{2}\ln 2\right)$。

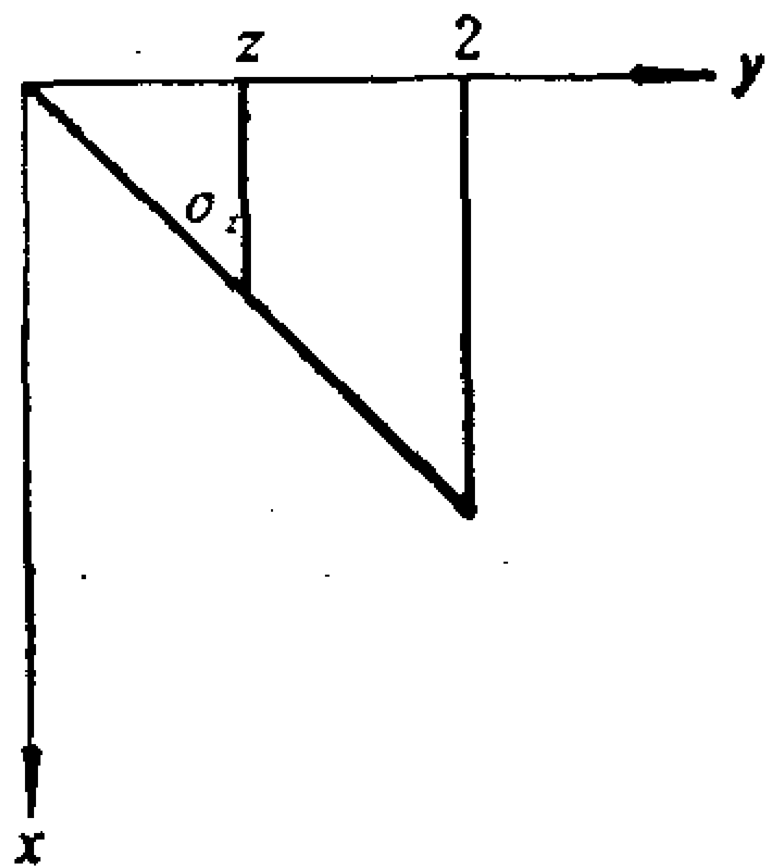


图 7

例 7 计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{V}\frac{xy}{\sqrt{z}}\,dxdydz$$

其中 V 是由锥面 $\left(\frac{z}{c}\right)^{2}=\left(\frac{x}{a}\right)^{2}+\left(\frac{y}{b}\right)^{2}$，坐标面 $x=0, y=0$ 以及 $z=c>0$ 所围成的立体 $(x>0, y>0)$

解 我们用上边所讲的两种方法分别计算。

$$(1)\quad I=\int_{0}^{c}dz\iint\limits_{\sigma_{z}}\frac{xy}{\sqrt{z}}dxdy$$

这里 σ_z 是当取定 z 时，用平面 $z=z$ 截V所得到的椭圆（四分之一）区域，显然

$$I=\int_0^c dz\int_0^{\frac{b}{c}z} ydy\int_0^{a\sqrt{\left(\frac{z}{c}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}\frac{x}{\sqrt{z}}dx=\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}$$

(2) $$I=\iint\limits_{\sigma_{xy}}dxdy\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

这里 σ_{xy} 是 V 在 xy 坐标面上的投影，它的方程为

$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$，$z=0$，$x>0$，$y>0$，（椭圆的四分之一）

$$\therefore\quad I=\iint\limits_{\sigma_{xy}}dxdy\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$=\int_0^a xdx\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}ydy\int_{c\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{c}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$=\frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}.$$

例 8 将累次积分 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)\,dz$ 变更积分次序，写出其它五种积分。

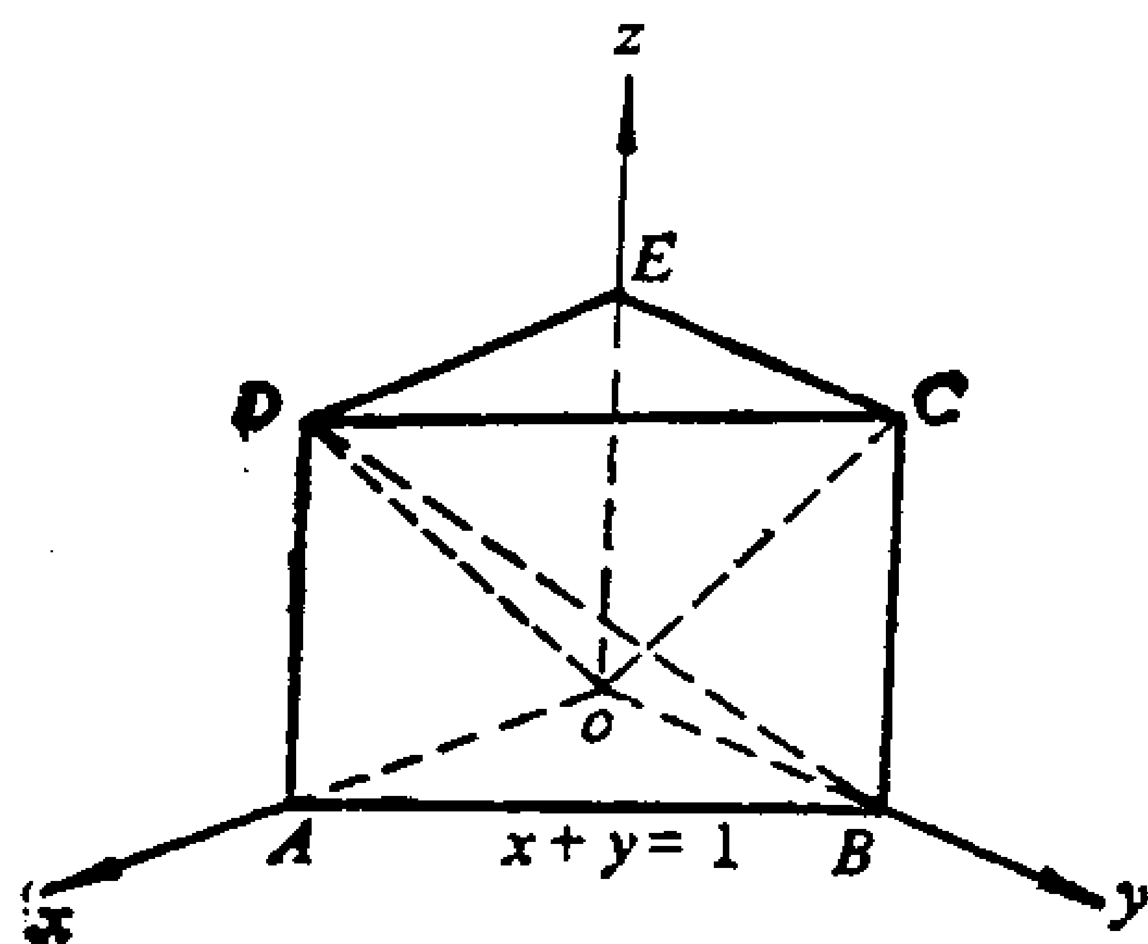


图 8

解 积分区域V由$z=0$，$z=x+y$，$y=0$，$y=1-x$，$x=0$所围成，如图8 若以不等式表示积分区域，则有

$$0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (1)$$

$$0\leqslant y\leqslant 1-x \qquad (2)$$

$$0\leqslant z\leqslant x+y \qquad (3)$$

若仍先对 z 积分，交换 x,y 的积分次序，就要看区域

V 在 xy 坐标面上的投影，这显然为三角形OAB。故有

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$$

若先对 y 积分，就要考虑 y 的变化范围，由图可知应将 V 分为两部分，即四面体 $OABD$ 及 $OBCD$，对于前者有 $1\leqslant y\leqslant 1-x$，对于后者有 $z-x\leqslant y\leqslant 1-x$。

它们在 xz 坐标面上的投影分别为三角形 OAD 及 ODE。由此可得到另两种积分

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy$$

$$I=\int_0^1 dz\int_0^z dx\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dz\int_z^1 dx\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy.$$

若先对 x 积分同理可得

$$I=\int_0^1 dz\int_0^z dy\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx+$$

$$+\int_0^1 dz\int_z^1 dy\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx$$

$$I=\int_0^1 dy\int_0^y dz\int_0^{1-y} f(x,y,z)dx+$$

$$+\int_0^1 dy\int_y^1 dz\int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)dx.$$

上面的解法借助于直观，也可以完全离开图形，讨论积分区域的分析表达式来确定积分限，解法如下：

由（1）式知 x 最小值为 0，于是由（2）知 y 的最大值为1，所以

$$0\leqslant y\leqslant 1 \tag{4}$$

由（2）知 $x\leqslant 1-y$ 再由（1）知

$$0\leqslant x\leqslant 1-y \tag{5}$$

由（3）、（4）、（5）即得到

$$I=\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dx\int_0^{x+y} f(x,y,z)dz.$$

若要先对 z 积分，需要先确定 z 的变化范围，（2）的后半部说明 y 的最大值为 $1-x$，（2）的前半部分说明 y 的最小值为零，而（3）的后半部说明 y 最小值为 $z-x$，若 $z>x$；则 y 的最小值为正数，所以 y 的上下限应分两种情形：

(i)　$z\leqslant x$ 时　$0\leqslant y\leqslant 1-x$,

(ii)　$z>x$ 时　$z-x\leqslant y\leqslant 1-x$.

对 y 积分后若想继续对 z 积分，则应考虑 z 的上下限，由（2）可知 $x+y$ 最大值为 1，代入（3）知 $z\leqslant 1$，则（3）化为 $0\leqslant z\leqslant 1$，结合（1）式及上述（i）（ii）两种情形，得到

$0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant z\leqslant x$，$0\leqslant y\leqslant 1-x$.

$0\leqslant x\leqslant 1$，$x<z\leqslant 1$，$z-x\leqslant y\leqslant 1-x$.

因此得到

$$I=\int_0^1 dx\int_0^x dz\int_0^{1-x} f(x,y,z)dy+\int_0^1 dx\int_x^1 dz\int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)dy$$

其它情形则类似进行分析。

以下三重积分可做为习作课的选题：

1．计算　$I=\iiint\limits_V z\,dxdydz$　其中 V 为椭球

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的上半部分。

$\left(答：I=\frac{\pi}{4}abc^2\right)$

2. 计算 $I=\iiint\limits_V z\,dxdydz$ 其中 V 为由锥面

$z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ 及 $z=h$ 所围成的立体。

$\left(\text{答：} I=\frac{\pi}{4}R^2h^2\right)$.

3. 将累次积分 $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)dz$

改变积分次序，写出其它五种积分。

三、 重积分的变量替换.

在计算重积分时借助于变量替换不仅可以使计算简便，而且由于新积分区域简单，容易确定累次积分上下限，从而减少错误。

对于二重积分来说，变量替换的法则如下：

设 $f(x,y)$ 在 xy 坐标面上区域 D 上连续，设

$$u=u(x,y),\qquad v=v(x,y) \tag{*}$$

在 D 上有对于 x,y 的连续偏导数，且有

$$J=\frac{D(u,v)}{D(x,y)}\neq 0.$$

通过变换（*）把区域 D 变换为区域 D'，则存在（*）的逆变换

$$x=x(u,v),\qquad y=y(u,v)$$

设对应关系是一一对应，则有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|dudv.$$

作为特例，二重积分计算中经常用到的极坐标变换，在

上述变量替换的基本假设之下，极坐标变换的公式为

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta.$$

对于三重积分，也有类似的变量替换法则，此处不再重复，但柱坐标变换及球坐标变换由于经常用到，故叙述如下：

柱坐标变换：直角坐标(x,y,z)与柱坐标(r,θ,z)的关系

为 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，$z=z$。

则有

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{D'} f[r\cos\theta, r\sin\theta, z]rdrd\theta dz.$$

球坐标变换：直角坐标(x,y,z)与球坐标(r,φ,θ)的关系为

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi.$$

则有

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\iiint_{D'} f[r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi]\cdot r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta.$$

例 9 计算二重积分

$I=\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$。$D$：圆心在原点，半径为$r$的圆域，

解 这个积分在直角坐标系下，计算不出结果，但如果化为极坐标下的二重积分，则很容易得出结果。

令 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$

则有 $$e^{-(x^2+y^2)}=e^{-r^2}$$
进而得到

$$I=\iint_D e^{-r^2}\cdot r dr d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R re^{-r^2}dr$$

$$=\pi(1-e^{-R^2})。$$

例 10 交换二重积分 $I=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}d\varphi\int_0^{\varphi}f(r,\varphi)dr$ 的积分次序。

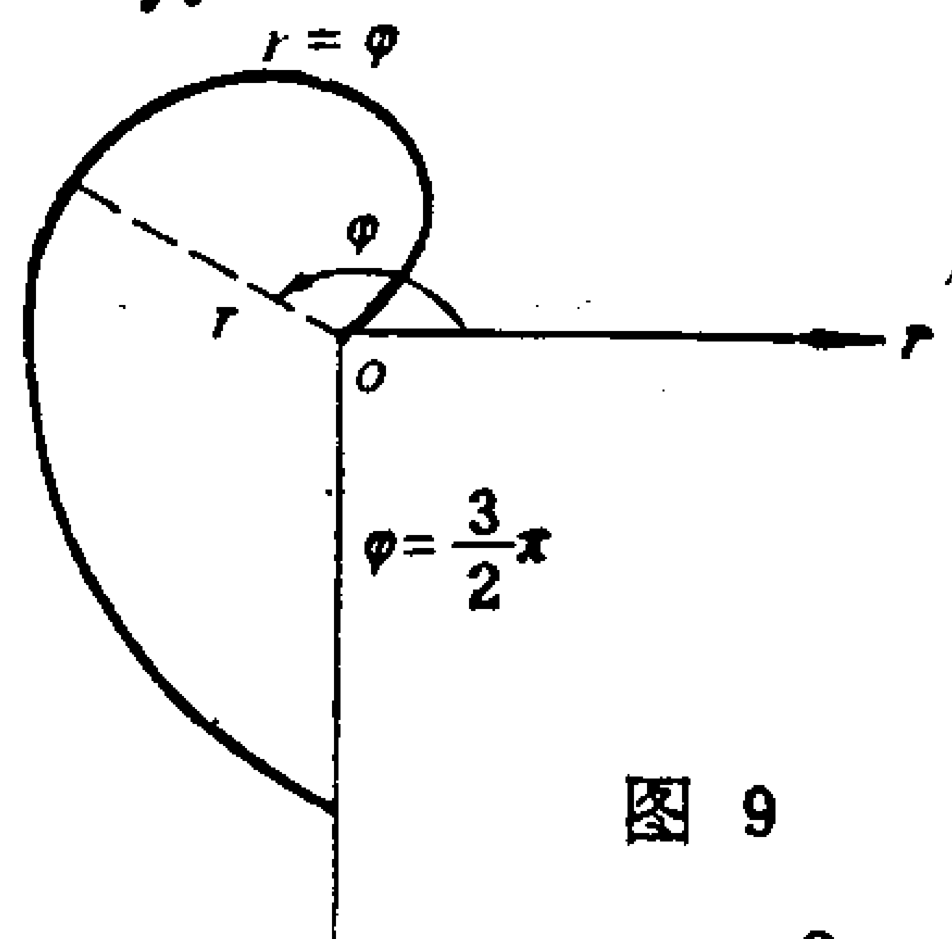


图 9

解 在极坐标下，积分区域为阿基米德螺线 $r=\varphi$ 及射线 $\varphi=\frac{3}{2}\pi$ 所围区域，如图 9。在极坐标系中 $\varphi=r$。显然 r 由 0 变到 $\frac{3}{2}\pi$，在 $\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ 上任取一 r 值时，φ 由 r 变到 $\frac{3}{2}\pi$，则

$$I=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dr\int_r^{\frac{3}{2}\pi}f(r,\varphi)d\varphi.$$

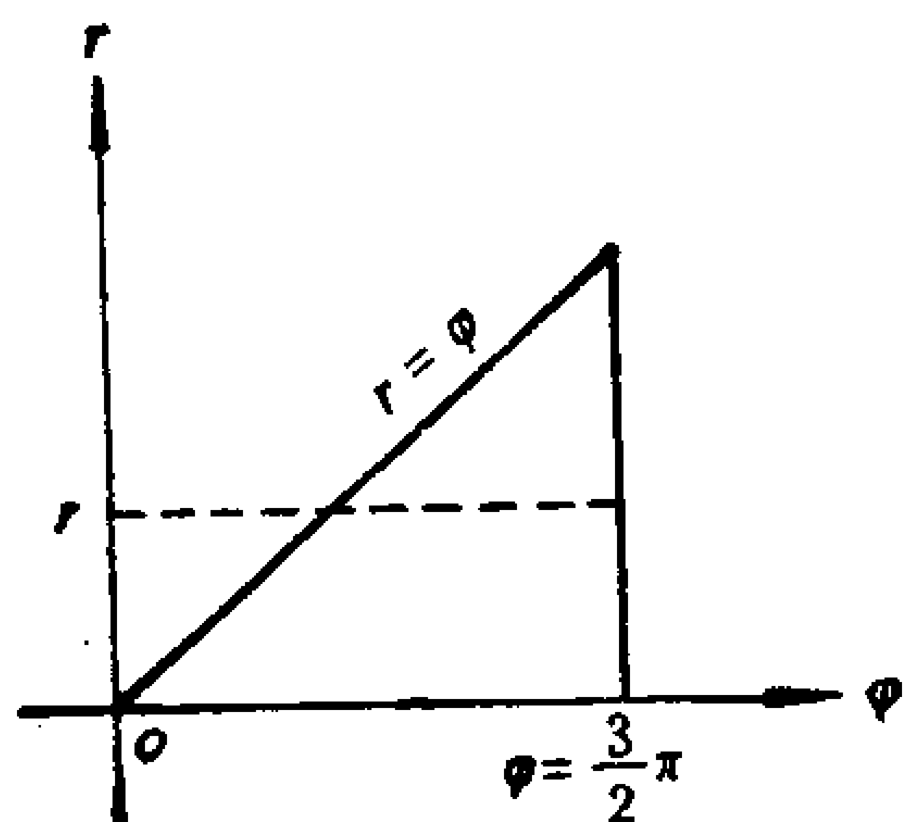


图 10

如果按直角坐标考虑问题，把 φ 看作横坐标，r 看作纵坐标，如左图 10，显然为一三角形区域，非常容易得到

$$I=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}dr\int_r^{\frac{3}{2}\pi}f(r,\varphi)d\varphi$$

可见第二种方法要简单、直观，且不易出现错误。

例 11　将二重积分

$I=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$　Ω是由 $x=0$，$y=0$，$x=1$，$y=1$ 所围成的正方形区域，化为极坐标之下的二次积分。（图 11）

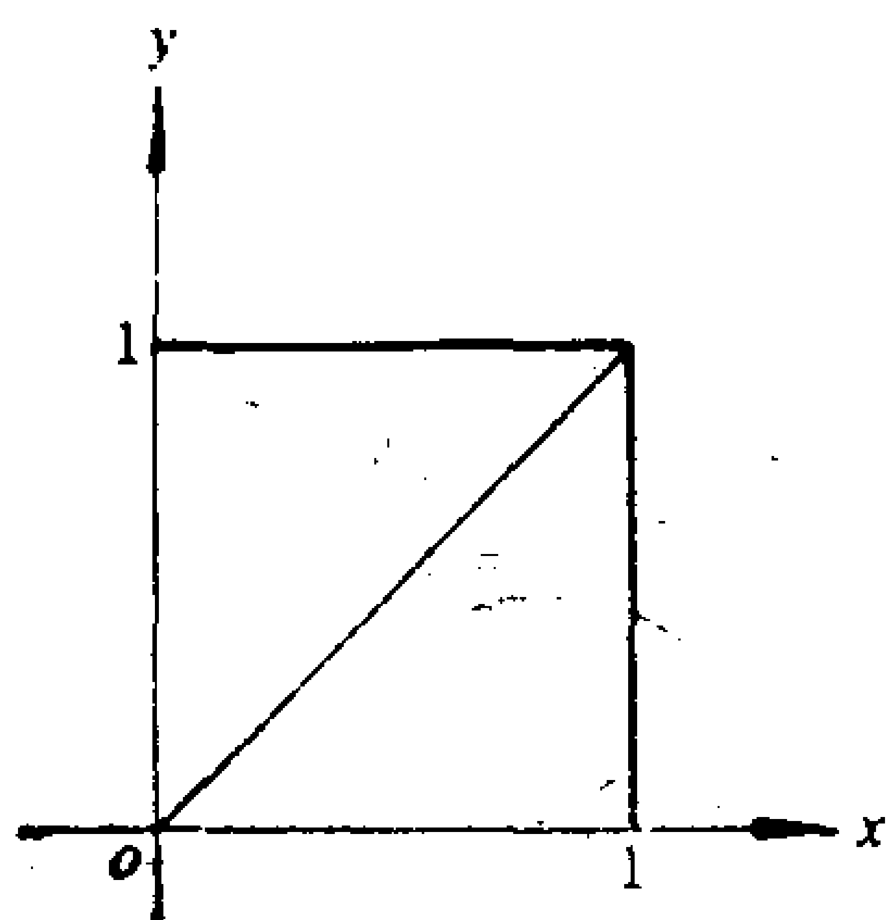


图 11

解　设　$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$

$x=1$ 化为　$r=\sec\varphi$

$y=1$ 化为　$r=\csc\varphi$

$y=x$ 化为　$\varphi=\frac{\pi}{4}$。

则有

$$I=\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sec\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr+$$

$$+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\csc\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdr$$

还可化为（图 12）

$$I=\int_0^1 rdr\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi+$$

$$+\int_1^{\sqrt{2}}rdr\int_{\operatorname{arcsec} r}^{\operatorname{arccsc} r}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)d\varphi$$

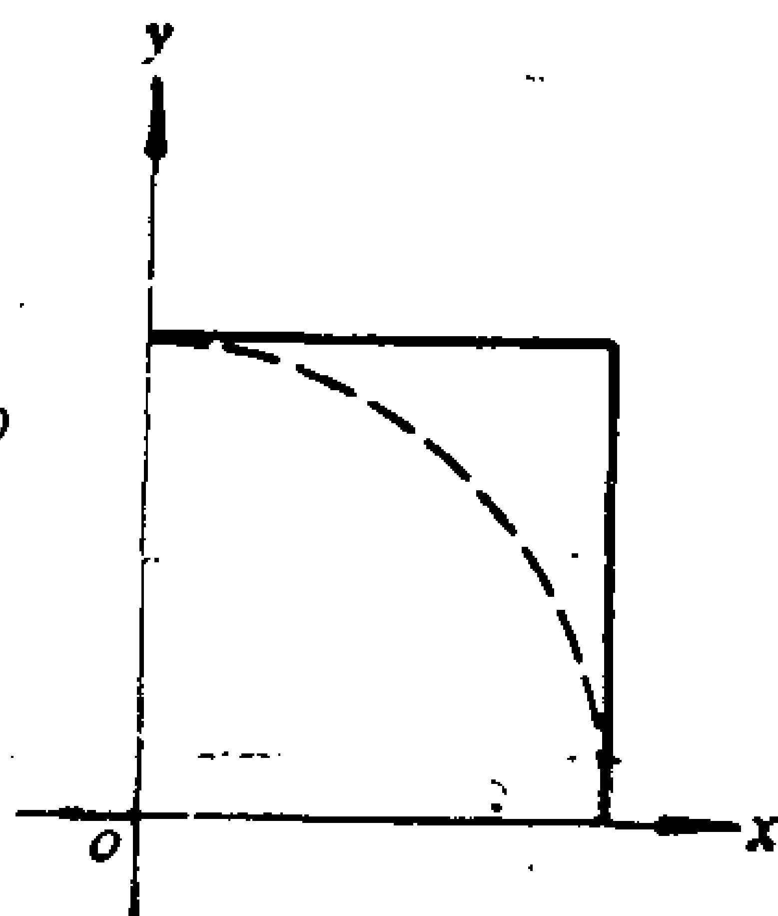


图 12

在极坐标下的二重积分，若交换积分次序学生往往感到困难。如果按 r,φ 的直角坐标平面的区域来考虑，则比较方便，举例如下：

在利用极坐标变换计算二重积分时，如果积分区域包含

坐标原点，此时$x=r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$应限制$r\geqslant0$，$0\leqslant\varphi\leqslant2\pi$。即使如此也不能保证变换是一对一的，并且当$r=0$时

$$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=0.$$

因此不满足二重积分换元公式的条件。但可证明换元的公式仍然成立，其证明过程可在习作课上进行。

为了证明方便，不妨设积分区域D为一半径为R的圆，相应于极坐标下(r,φ)坐标面上的区域。

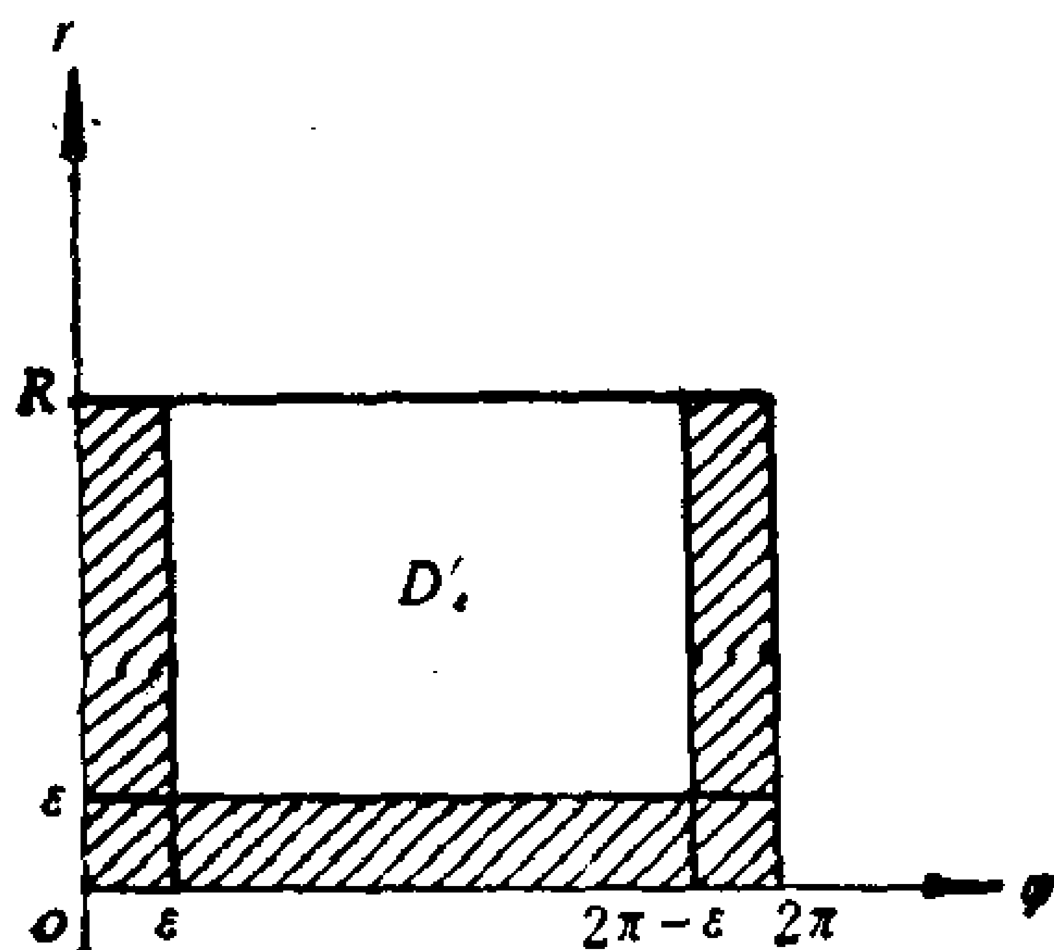


图13

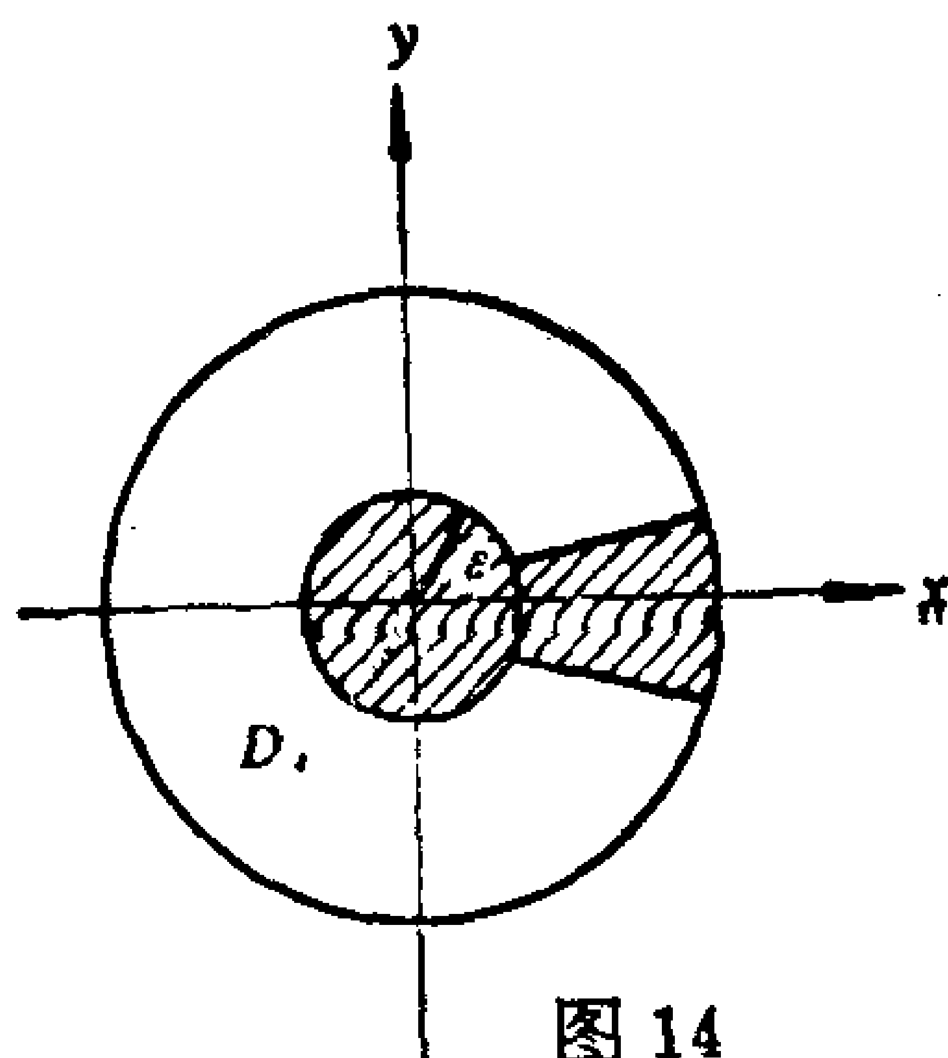


图14

先考虑以下区域D'_ε：$\varepsilon\leqslant r\leqslant R$，$\varepsilon\leqslant\varphi\leqslant2\pi-\varepsilon$如图13、14通过极坐标变换$D'_\varepsilon$与$xy$坐标平面区域$D_\varepsilon$建立了一一对应关系，且雅可比行列式不为0，所以

$$\iint\limits_{D_\varepsilon}f(x,y)dxy=\iint\limits_{D'_\varepsilon}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

设区域D中挖去的那一部分区域（阴影部分）为$\overline{D}$，则有

$$\left|\iint\limits_{D}f(x,y)dxdy-\iint\limits_{D_\varepsilon}f(x,y)dxdy\right|$$

$$=\left|\iint\limits_{\overline{D}} f(x,y)dxdy\right|$$

$$\leqslant \max_{(x,y)\in \overline{D}} |f(x,y)| \cdot \overline{D}\text{的面积。}$$

显然当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\overline{D}$ 的面积$\to 0$。故当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\iint\limits_{D_\varepsilon} f(x,y)dxdy \longrightarrow \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

根据同样的理由，当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\iint\limits_{D'_\varepsilon} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi \longrightarrow \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi$$

所以

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D'} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

成立。

例 12 将 $I=\int_0^2 dx\int_x^{\sqrt{3}x} f(\sqrt{x^2+y^2})dy$ 化为极坐标下的二重积分

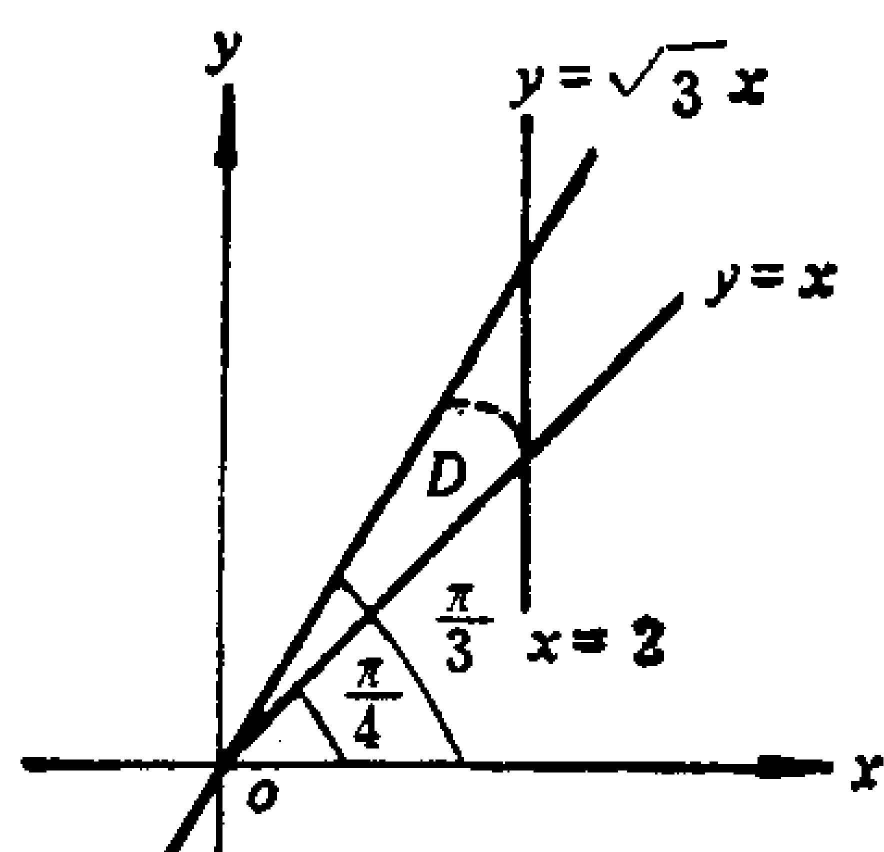


图 15

解 积分区域 D 为由 $y=x, y=\sqrt{3}x$，$x=2$ 围成的区域，如图 15。

在极坐标系中，区域D由

$$\varphi=\frac{\pi}{4},\quad \varphi=\frac{\pi}{3},\quad r=2\sec\varphi$$

所围成。

由极坐标变换公式可知

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi\int_{0}^{2\sec\varphi}rf(r)dr$$

若交换积分次序，需将区域D分为两部分．得到

$$I=\int_{0}^{2\sqrt{2}}rf(r)dr\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi+\int_{2\sqrt{2}}^{4}rf(r)dr\int_{\arccos\frac{2}{r}}^{\frac{\pi}{3}}d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{12}\int_{0}^{2\sqrt{2}}rf(r)dr+\int_{2\sqrt{2}}^{4}\left(\frac{\pi}{3}-\arccos\frac{2}{r}\right)rf(r)dr$$

例 13 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}\frac{2c^2}{a^2b^2}dxdy$

其中D是由曲线L：$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{2xy}{c^2}\quad(x\geqslant0,\ y\geqslant0)$

围成的区域．

解 积分区域的边界为双扭线，可作广义极坐标变换将其化简，设

$$x=ar\cos\varphi\qquad y=br\sin\varphi.$$

则双扭线方程化为

$$r^2=\frac{ab}{c^2}\sin2\varphi.$$

故积分区域可由不等式

$$0\leqslant r\leqslant\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin2\varphi}\quad,0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}$$

表示

$$J=\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -ar\sin\varphi\\ b\sin\varphi & br\cos\varphi\end{vmatrix}=abr$$

∴有 $\qquad I=\iint\limits_{D}\frac{2c^2}{a^2b^2}abrdrd\varphi$

$$=\frac{2c^2}{ab}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{ab}{c^2}\sin 2\varphi}}rdr$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi d\varphi=1.$$

由以上二例可知当被积函数或积分区域边界曲线方程中含有 x^2+y^2 时利用极坐标变换往往可以简化计算。

例 14 计算二重积分 $I=\iint\limits_{|x|+|y|\leq 1}f(x+y)dxdy$.

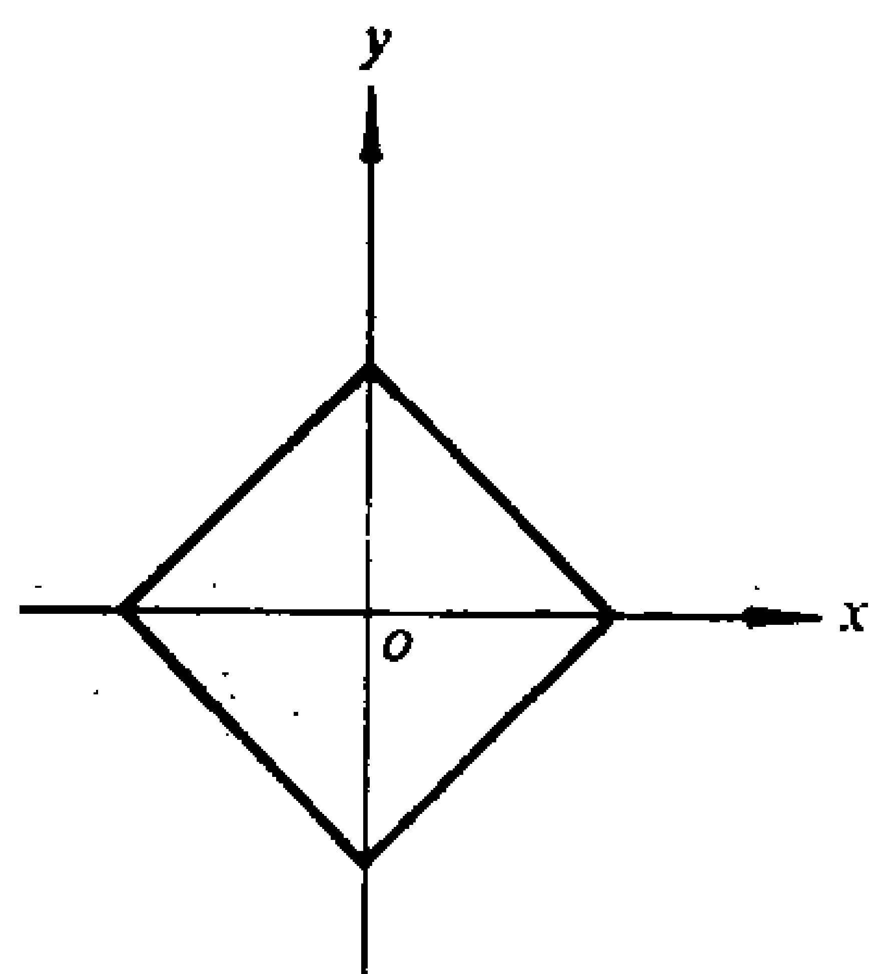


图 16

解 积分区域 D 为正方形 (如图 16)区域。若直接计算，虽然积分区域具有对称性，但被积函数不一定具有对称性，所以计算比较繁。

可作变量替换

设 $x+y=u$, $x-y=v$.

则有 $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$

$$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},\quad |J|=\frac{1}{2}.$$

由于变换是线性的，所以对应关系是一一对应。如图积分区域 D 对应 uv 坐标面上的区域 D' (图 17)，所以

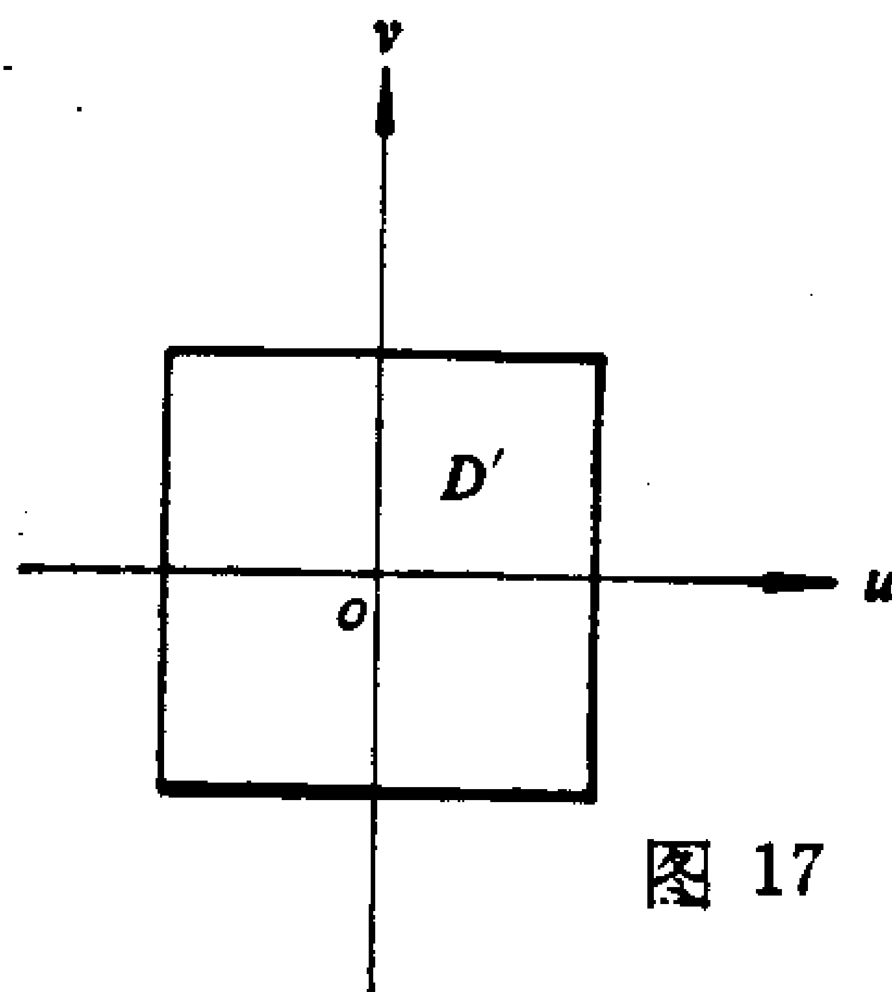


图 17

$$I=\int_{-1}^{1}dv\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}f(u)du$$

$$=\int_{-1}^{1}f(u)du$$

例 15 计算二重积分 $I=\iint\limits_D f(xy)dxdy$.

D 是由 $xy=1$, $xy=2$, $y=x$, $y=4x$ 所围成的区域.

解 积分区域如图 18 所示，如直接计算需先求四条曲线的交点坐标还要分块积分.

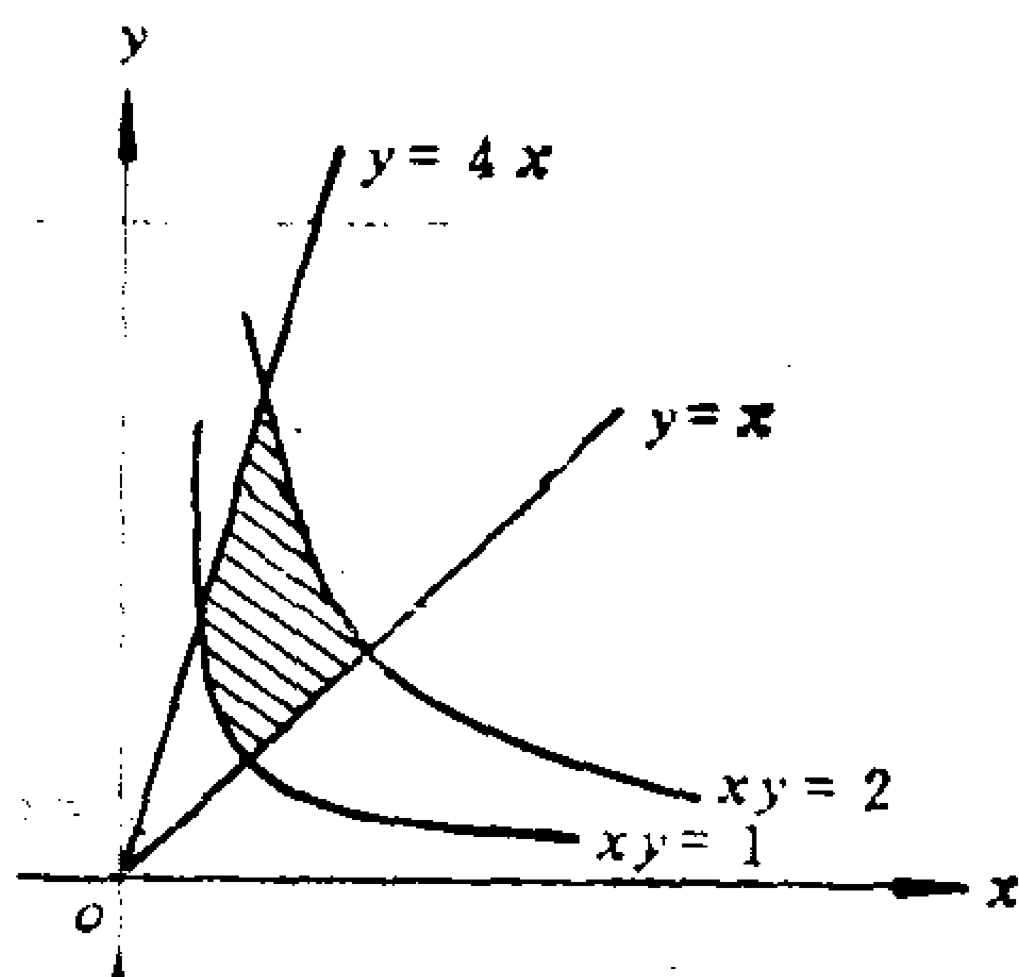


图 18

若设 $u=xy$, $v=\dfrac{y}{x}$

则有 $x=\sqrt{\dfrac{u}{v}}$, $y=\sqrt{uv}$.

由于变换都是单调连续的，所以区域 D 变换为 u,v 坐标面上的区域 $D'[1,2;1,4]$ 时，点的对应关系是一一对应. 所以有

$$I=\iint\limits_D f(xy)dxdy=\int_1^4 dv\int_1^2 |J|f(u)du$$

其中 $$J=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}}\\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{2v}$$

$$\therefore\quad I=\int_1^4 dv\int_1^2\frac{1}{2v}f(u)du=\ln 2\int_1^2 f(u)du.$$

例 16 计算二重积分 $I=\iint\limits_D\dfrac{x^2\sin xy}{y}dxdy$

其中 D 是由 $\begin{matrix}x^2=ay, & x^2=by & 0<a<b\\ y^2=cx, & y^2=dx & 0<c<d\end{matrix}$ 围成的区域.

解 作变换 $x^2=uy$, $\qquad a\leqslant u\leqslant b$

$$y^2 = vx, \qquad c \leqslant v \leqslant d$$

具体计算可由学生完成

$$J = \frac{1}{3}$$

$$I = \frac{1}{3}\int_a^b du \int_c^d u \sin uv dv$$

$$= \frac{\sin bc - \sin ac}{3c} - \frac{\sin bd - \sin ad}{3d}.$$

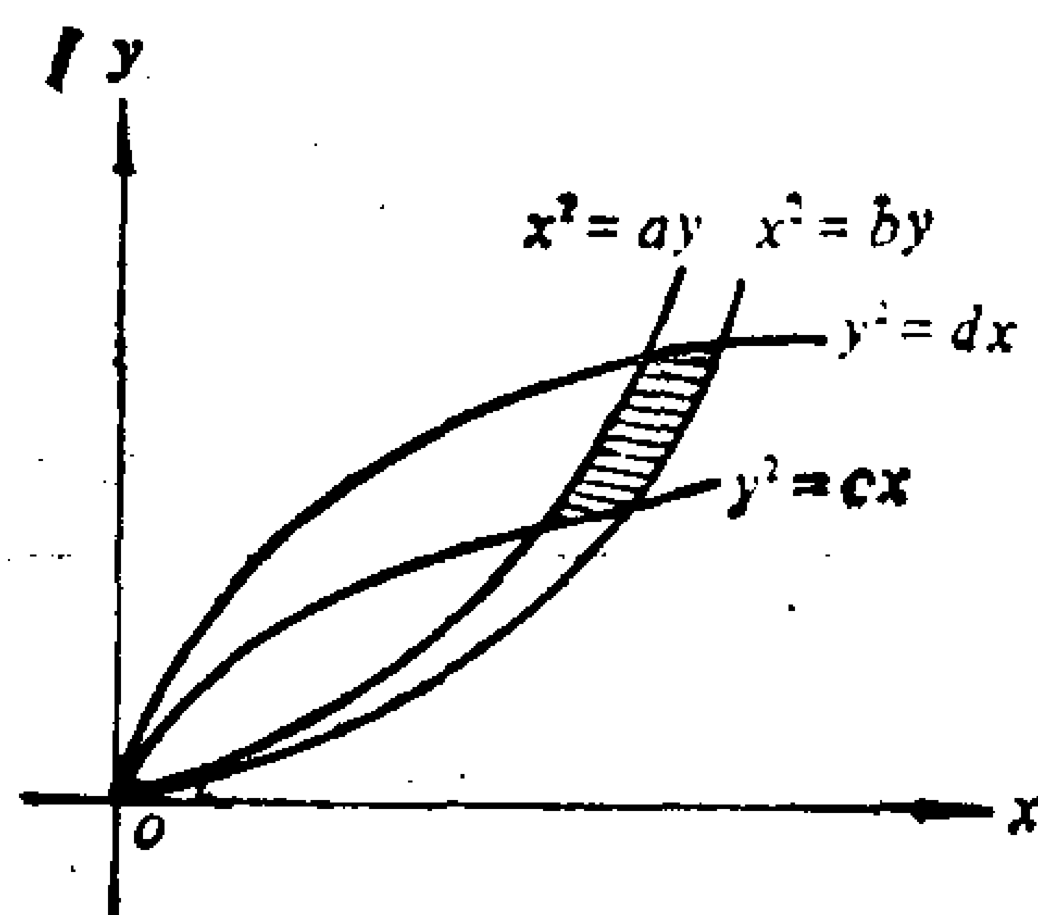


图 19

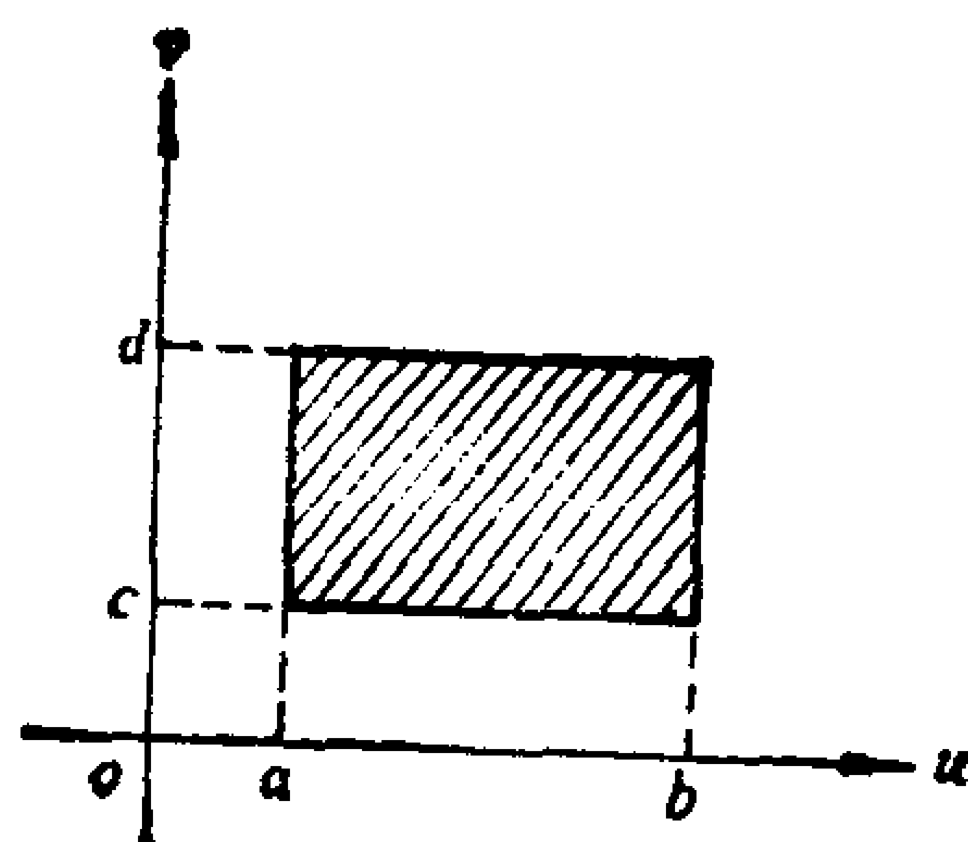


图 20

例 17 计算二重积分 $I = \iint\limits_D f(xy)dxdy$，其中区域 D 由 $xy = a$，$xy = b(0 < a < b)$，$x - y = c$，$x - y = d$ $(c < d)$ 围成。(图 21)

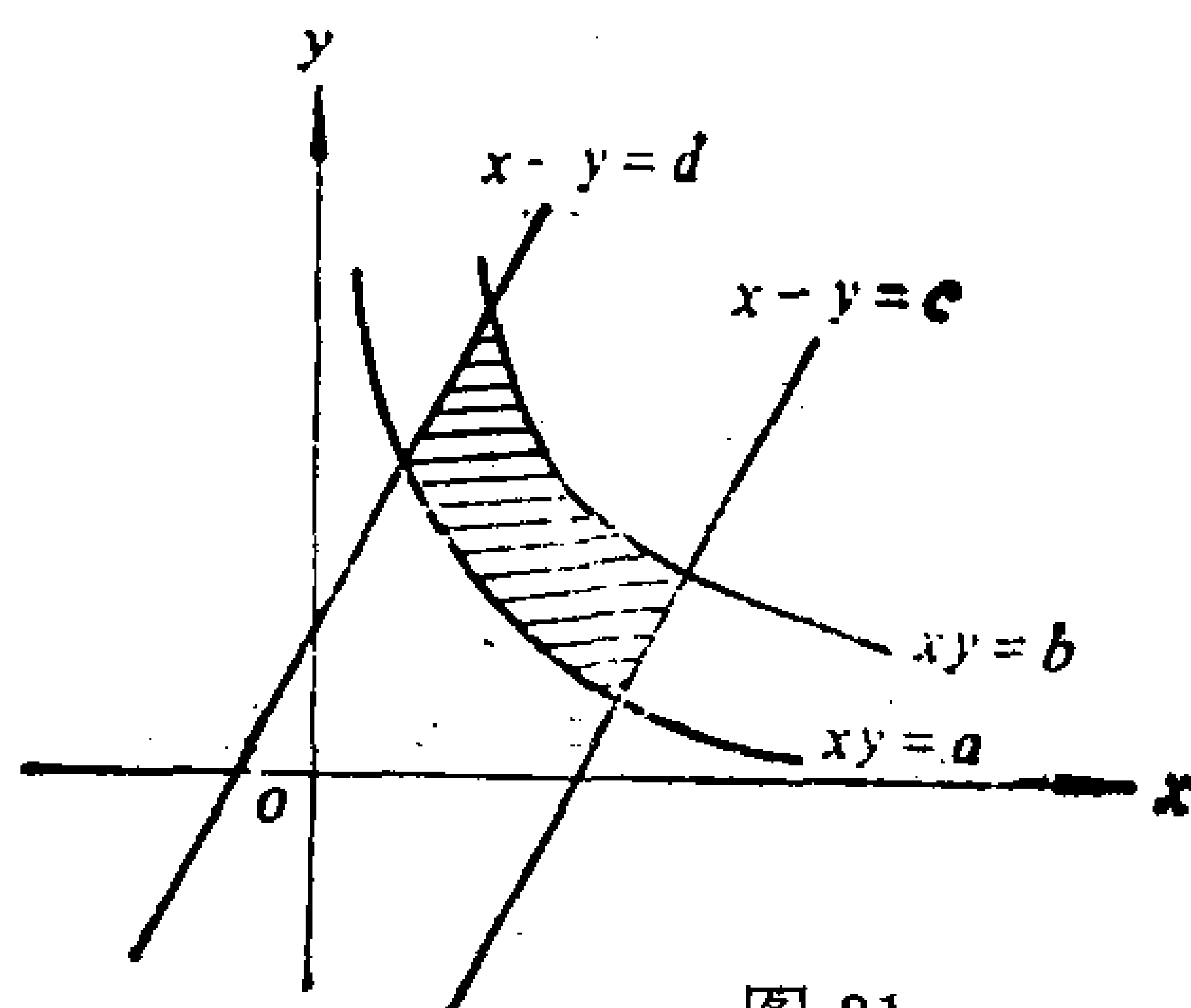


图 21

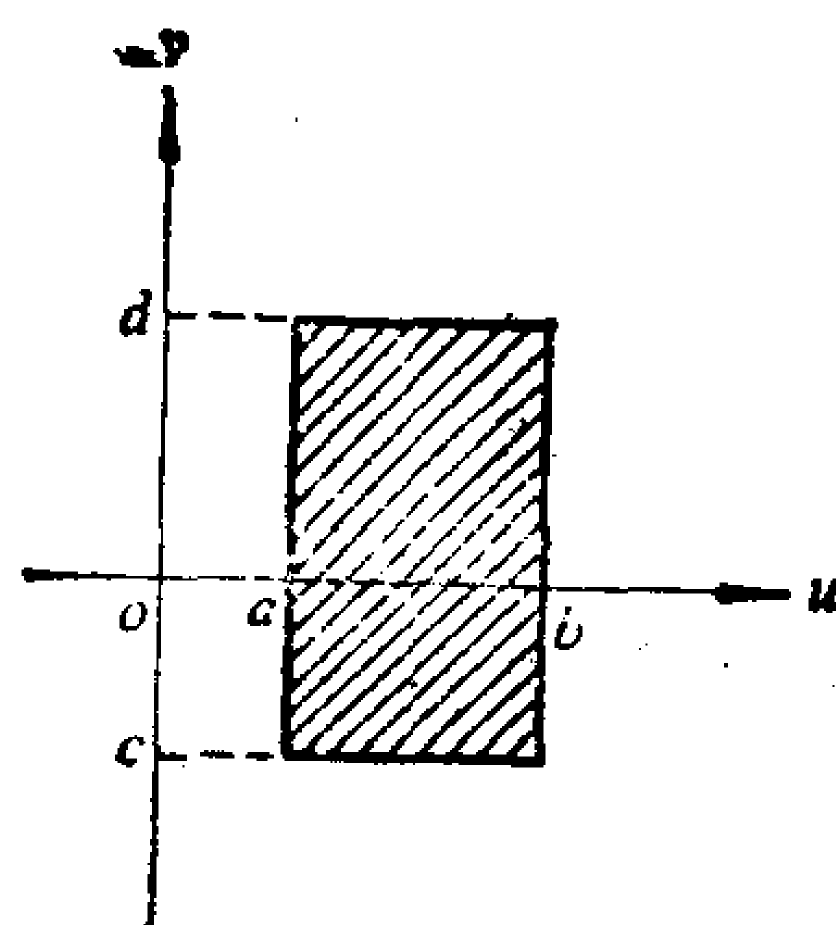


图 22

解 作变换 $u=xy,\ v=x-y$

则 xy 坐标面上的区域 D 化为 uv 坐标面上的区域 D'：$a\leqslant u\leqslant b,\ c\leqslant v\leqslant d$，如图 22。

可计算出 $|J|=\left|\dfrac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|=\dfrac{1}{\sqrt{v^2+4u}}$

$$\therefore\qquad I=\int_c^d\left[\int_a^b\frac{f(u)du}{\sqrt{v^2+4u}}\right]dv$$

例 18 计算二重积分．$I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\left|\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}-x^2-y^2\right|dxdy$。

解 积分区域与被积函数都涉及 x^2+y^2，所以按极坐标计算方便些，被积函数是 $\varphi(x,y)=x^2+y^2-\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}$ 的绝对值。需要先分辨 $\varphi(x,y)$ 的正负，这正负值的分界线是

$$\Gamma:\ x^2+y^2-\frac{x+y}{\sqrt{2}}=0$$

或 $$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{4}$$

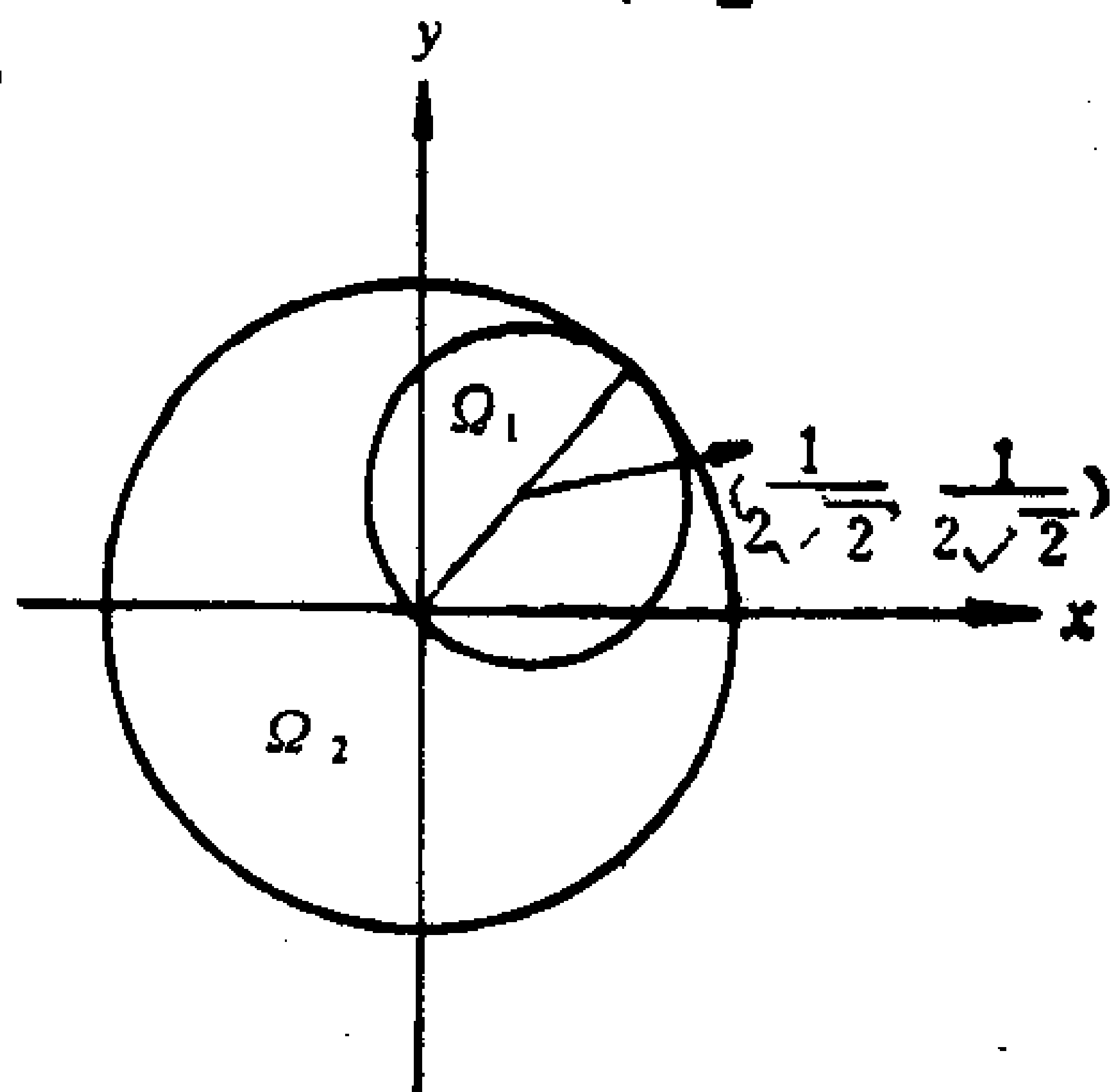


图 23

Γ 的内部 $\Omega_1\subset\Omega$（如图 23）

在 Ω_1 内，$\varphi(x,y)<0$，

$\therefore\quad |\varphi(x,y)|=-\varphi(x,y)$ 在 $\Omega_2=\Omega\setminus\Omega_1$ 内 $\varphi(x,y)>0$

$$|\varphi(x,y)|=\varphi(x,y)$$

所以

$$I=-\iint\limits_{\Omega_1}\varphi(x,y)dxdy+\iint\limits_{\Omega_2}\varphi(x,y)dxdy$$

$$= \iint_{\Omega} \varphi(x,y)dxdy - 2\iint_{\Omega_1} \varphi(x,y)dxdy.$$

$$= I_1 - 2I_2$$

现在按极坐标分别计算 I_1 和 I_2 两个积 分，计算 I_1 时，由于积分区域是以原点为中心的单位圆，故可设

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

则得

$$I_1 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left[\frac{r(\cos\varphi + \sin\varphi)}{\sqrt{2}} - r^2\right] rdr$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

计算 I_2 时可设 $x - \frac{1}{2\sqrt{2}} = r\cos\varphi$, $y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = r\sin\varphi$

则得

$$I_2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{1}{2}} \left(r^2 - \frac{1}{4}\right) rdr = -\frac{\pi}{32}$$

$$\therefore \quad I = \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{-\pi}{32}\right) = \frac{9}{16}\pi$$

关于三重积分变量替换中的柱坐标和球坐标变换是经常用到的有效方法。通过举例讲解和练习使学生能够判断哪类问题变为用柱坐标或球坐标计算较为方便。一般来说不仅要考虑积分区域而且要考虑被积函数的特点。如果积分区域是圆柱。或者它在某坐标平面上的投影是圆，或者被积函数中含有 x^2+y^2（或 y^2+z^2，x^2+z^2）的因子时就可以试用柱坐标变换来计算。如果积分区域为球形区域（或为其一部分）或被积函数中含有 $x^2+y^2+z^2$ 的因子时，就可以试用球坐标变换来计算。举例如下：

例 19 计算 $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ 其中 V 是由

$x^2+y^2=z^2$，$z=1$ 所围区域。

解 由于被积函数中含 x^2+y^2 因子。积分区域在 xy 坐标面上的投影又为圆，利用柱坐标。计算方便。

令 $x=r\cos\varphi$。$y=r\sin\varphi$。$z=z$。

则
$$I=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 r^2dr\int_r^1 dz$$

$$=\frac{\pi}{6}.$$

例 20 计算 $I=\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ 其中 V 是由

$x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的区域。

解 由于被积函数中含 $x^2+y^2+z^2$ 因子，积分区域为球，故可用球坐标变换。

设 $x=r\sin\varphi\cos\theta$，$y=r\sin\varphi\sin\theta$，$z=r\cos\varphi$ 则积分区域为 $r=\cos\varphi$。

所以
$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}d\varphi\int_0^{\cos\theta}r^3\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{\pi}{10}.$$

例 21 计算：

$$I=\iiint\limits_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\,dxdydz$$ 其中 V 为椭球

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所围区域。

解 如用球坐标变换，则相当复杂，与二重积分的情形

类似，我们可用广义球坐标变换来计算。

设 $x = ar\sin\varphi\cos\theta, y = br\sin\varphi\sin\theta, z = cr\cos\varphi$。则有

$$I = abc\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\, r^2 dr$$

$$= \frac{1}{4}\pi^2 abc.$$

例 22 已知 $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leq t^2} f(x^2+y^2+z^2)dxdydz$

求 $F'(t)$，其中 f 可微。

解 用球坐标变换

设 $x = r\sin\varphi\cos\theta$，$y = r\sin\varphi\sin\theta$，$z = r\cos\varphi$，

则有

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int_0^t f(r^2)r^2 dr$$

$$= 4\pi\int_0^t f(r^2)r^2 dr$$

$$\therefore \quad F'(t) = 4\pi t^2 f(t^2).$$

例 23 计算

$I = \iiint\limits_V xyzdxdydz$，其中 V 在第一卦限内由曲面

$z = \dfrac{x^2+y^2}{m}$，$z = \dfrac{x^2+y^2}{n}$，

$$xy = a^2,\quad xy = b^2,\quad y = \alpha x,\quad y = \beta x$$

$$(0<a<b,\ 0<\alpha<\beta,\ 0<m<n)$$

所围成

解 作变量替换

$$u=\frac{y}{x},\quad v=xy,\quad w=\frac{x^2+y^2}{y},$$

则围成 V 的六个曲面依次化为

$$w=m,\ w=n,\ v=a^2,\ v=b^2,\ u=\alpha,\ u=\beta.$$

计算 $$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\frac{v}{2w^2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)$$

且有 $$x=\sqrt{\frac{v}{u}},\ y=\sqrt{uv},\ z=\frac{v}{w}\left(u+\frac{1}{u}\right)$$

则 $$I=\int_\alpha^\beta\int_{a^2}^{b^2}\int_m^n\sqrt{\frac{v}{u}}\cdot\sqrt{uv}\cdot\frac{v}{w}\left(u+\frac{1}{u}\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{v}{2w^2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)dudvdw$$

$$=\frac{1}{32}(b^8-a^8)\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)\left[(\beta^2-\alpha^2)\left(1+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)+\right.$$

$$\left.+4\ln\frac{\beta}{\alpha}\right].$$

以下重积分可用坐标变换计算，可以作为习作课的选题。

1．计算$I=\iint\limits_D adxdy$ 其中 D 是四叶玫瑰线的一叶所围的区域，即 $(x^2+y^2)^2=2xy$（$x\geqslant0$，$y\geqslant0$）所围区域。

（答：$I=\frac{a}{2}$．）

2．计算$I=\iint\limits_D xydxdy$ D是由$y=ax^3$，$y=bx^3$，$y^2=px$，$y^2=qx$ 所围的区域。

（答：$I=\frac{5}{48}\left(a^{-\frac{6}{5}}-b^{-\frac{6}{5}}\right)\left(q^{\frac{8}{5}}-p^{\frac{8}{5}}\right)$）

3. 计算 $I=\iint\limits_D (x+y)dxdy$　其中D是由 $x^2+y^2=x+y$ 所围的区域. $\left(答: I=\frac{\pi}{2}\right)$.

4. 计算 $I=\iiint\limits_V (x^2+y^2)dxdydz$　其中 V 是由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围区域. $\left(答: I=\frac{\pi}{6}\right)$

5. 计算 $I=\iiint\limits_V dxdydz$　其中 V 是曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$所围区域. $\left(答: I=\frac{1}{3}\pi a^3\right)$

6. 计算 $I=\iiint\limits_V dxdydz$　其中 V 是由六个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm d_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm d_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm d_3$$

所围成的区域

$$\left(答: I=\frac{8}{|\Delta|}d_1d_2d_3 \text{ 其中 } |\Delta|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\right).$$

§ 3　重积分的应用

一、重积分的几何应用

用二重积分和三重积分可以计算平面图形的面积、空间立体的体积，空间曲面的面积等. 通过习题及习作课的练习

不仅要求学生掌握各种解决几何问题的方法，而且要他们学到各种技巧，以便快速、准确、简洁地解决这类问题。

用重积分求解各种几何问题的公式主要有

1. xy 坐标平面上有界可求积的区域 D 的面积为：

$$S=\iint_D dxdy.$$

在极坐标平面上则是

$$S=\iint_{D'} rdrd\varphi.$$

2. 在 xy 坐标平面上方直立的曲顶柱的体积为

$$V=\iint_D f(x,y)dxdy.$$

其中 $z=f(x,y)$ 为顶面的方程，D 为柱体在 xy 坐标平面上的底。

在极坐标平面上则为

$$V=\iint_{D'} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)rdrd\varphi.$$

3. 空间有界可求积的曲面面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

其中 $z=f(x,y)$ 为空间曲面的方程，

D 为曲面在 xy 坐标平面上的投影。

若用极坐标表示，则是

$$S=\iint_{D'}\sqrt{r^2+r^2\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,drd\varphi.$$

若曲线由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \qquad (u,v)\in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

给出，则

$$S = \iint\limits_D \sqrt{EG - F^2}\,dudv.$$

其中

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2$$

$$G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2.$$

$$F = x'_u \cdot x'_v + y'_u \cdot y'_v + z'_u \cdot z'_v.$$

4. 三维空间中有界可求积的区域 V 的体积为

$$I = \iiint\limits_V dxdydz.$$

在柱坐标系之下为

$$I = \iiint\limits_{V'} rdrd\varphi dz.$$

在球坐标系之下为

$$I = \iiint\limits_{V'} \rho^2 \sin\varphi d\rho d\varphi d\theta.$$

由于公式很多，容易混淆，这就需要多加运用；同一问题往往有不同的公式可用，这里又有一个选择公式的问题。因此应在习作课上引导学生总结一下经验，多做些练习，才可以掌握各种不同的技巧和方法。

例 1 设Ω为直立在 xy 坐标面上方的曲顶柱体，曲顶面的方程为 $z=f(x,y)$ $(f(x,y)\geqslant 0)$，D 为曲顶柱体在 xy 坐标面上的底。证明

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iiint_\Omega dxdydz.$$

证 从几何意义上看

$\iint_D f(x,y)dxdy$ 与 $\iiint_\Omega dxdydz$ 都表示曲顶柱体 Ω 的体积。

另一方面，将三重积分化为重叠积分，则是

$$\iiint_\Omega dxdydz = \iint_D dxdy \int_0^{f(x,y)} dz$$

$$= \iint_D f(x,y)dxdy.$$

例 2 计算由 $y=x^2$，$y=x^3$，$z=1+x^2+y^2$ 所围立体的体积。

解 $V=\iint_D (1+x^2+y^2)dxdy$

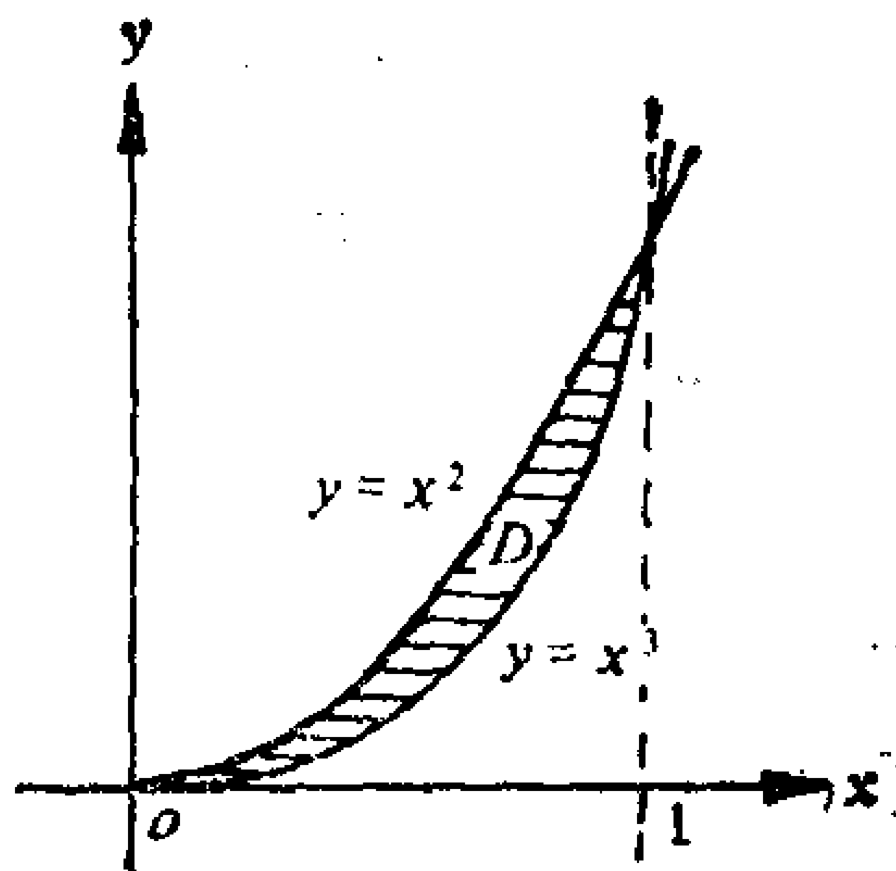


图 24

其中 D 是 xy 坐标面上由 $y=x^2$，$y=x^3$ 所围的区域，两曲线交于 (0，0) 及(1,1)两点，所围区域在[0,1]范围内。当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$x^2\geqslant x^3$。所以

$$V=\int_0^1 dx\int_{x^3}^{x^2}(1+x^2+y^2)dy$$

$$=\frac{1}{4}.$$

由此例可知计算体积，有时还要比较函数的大小。

例 3 计算由 $z=1-4x^2-y^2$，及 $z=0$ 所围立体的体积。

解 为确定二重积分的积分区域，应求出$z=1-4x^2-y^2$在 xy 坐标平面上的截痕。

$$\begin{cases} z=0 \\ z=1-4x^2-y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z=0 \\ \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}+\dfrac{y^2}{1^2}=1, \end{cases}$$

它是 xy 坐标平面上的椭圆、再由椭圆抛物面 $z=1-4z^2-y^2$ 的对称性。得

$$V=4\iint\limits_D (1-4x^2-y^2)dxdy$$

$$=4\int_0^{1/2}dx\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}(1-4x^2-y^2)dy$$

$$=\frac{\pi}{4}.$$

例 4 计算旋转抛物面 $x^2+y^2=az$ （$a>0$），柱面$x^2+y^2=2ax$ 与平面 $z=0$ 所围立体的体积。

解 该立体在 xy 坐标平面上的投影区域为

$$x^2+y^2\leqslant 2ax$$

按这个不等式确定重叠积分的上下限时不能避免二次根式，显然计算麻烦。因此采用柱坐标计算。令

$$\begin{cases} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=z \end{cases}$$

有

$$\frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,z)}=r$$

抛物面方程变为 $r^2=az$，柱面方程变为

$r=2a\cos\varphi$ 于是

$$0\leqslant z\leqslant r^2/a, \qquad 0\leqslant r\leqslant 2a\cos\varphi, \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

∴ 体积

$$V=\iiint_{\Omega}dxdydz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}rdr\int_0^{\frac{r^2}{a}}dz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{r^3}{a}dr$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16a^4}{4a}\cos^4\varphi d\varphi$$

$$=8a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi$$

$$=\frac{3}{2}\pi a^3.$$

例 5 计算由 $y^2+z^2=4ax$ 与圆柱 $x^2+y^2=2ax$ 所围立体的体积。

解 $y^2+z^2=4ax$ 是旋转抛物面，

显然立体在 xy 坐标平面上的投影 D 即为圆 $\begin{cases}x^2+y^2=2ax\\ z=0\end{cases}$ 所围的区域。于是有

$$V=\iint_D 2\sqrt{4ax-y^2}\,dxdy.$$

$$=4\int_0^{2a}dx\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4ax-y^2}\,dy$$

$$= a^3\left(2\pi + \frac{16}{3}\right).$$

例 6 计算由 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与圆柱 $x^2+y^2=Rx$ 所围立体的体积。

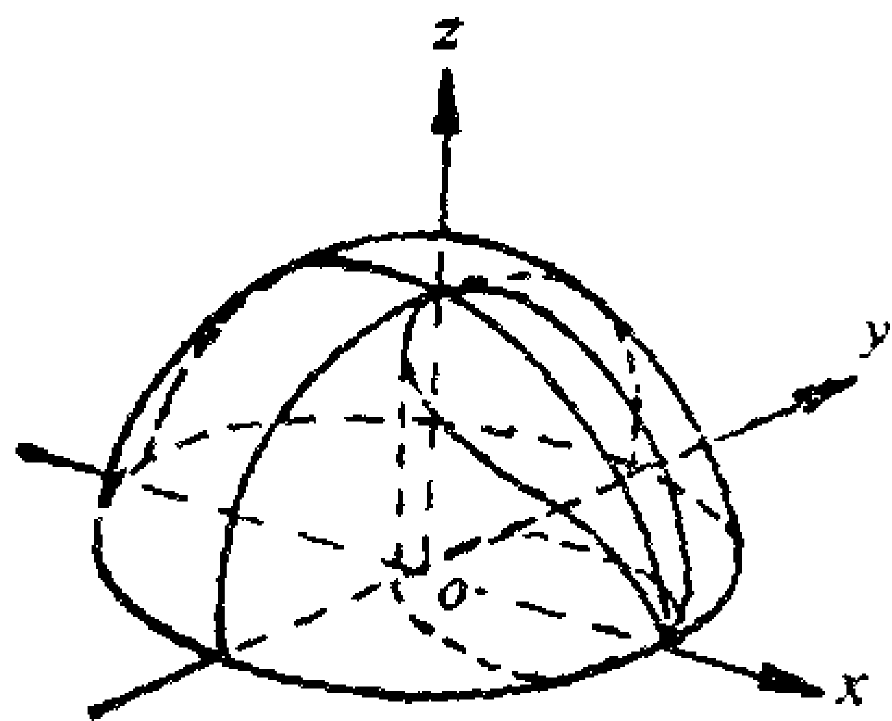


图 25

解 显然该立体在 xy 坐标平面上的投影即为

$$\begin{cases} x^2+y^2=Rx \\ z=0 \end{cases}$$

另外不要忽略还有 xy 坐标平面下方的一半，并由对称性，得到

$$V = 4\iint_D \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dxdy.$$

其中 D 是 xy 坐标平面上第一象限内由 $x+y^2=Rx$ 及 $y=0$ 所围的半圆区域。

于是有

$$V = 4\int_0^R dx\int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2-(x^2+y^2)}\,dy$$

直接计算这个积分很麻烦，利用极坐标变换则比较简单，这时 D的边界是 $r=R\cos\theta$。

$$V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2-r^2}\,rdr$$

$$= \frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta)d\theta$$

$$= \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

例 7 计算由空间曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$ 所围立体的

体积.

解 由$(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z$可知a,z同号，不妨设它们都$\geqslant 0$。这曲面关于xz坐标平面，yz坐标平面都对称，所以只计算第一卦限部分的体积即可。由于曲面方程里有$x^2+y^2+z^2$，所以用球坐标计算方便些，这样曲面方程化为

$$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}\,.$$

第一卦限部分只须取

$$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\quad V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\sin\varphi\,dr$$

$$=\frac{1}{3}\pi a^3.$$

例 8 曲面$x^2+y^2+az=4a^2$将球$x^2+y^2+z^2\leqslant 4az$分割为两部分，求这两部分体积之比。

解 曲面$x^2+y^2+az=4a^2$与球面$x^2+y^2+z^2=4az$相交于一圆

$$\begin{cases}x^2+y^2=3a^2\\ z=a\end{cases}$$

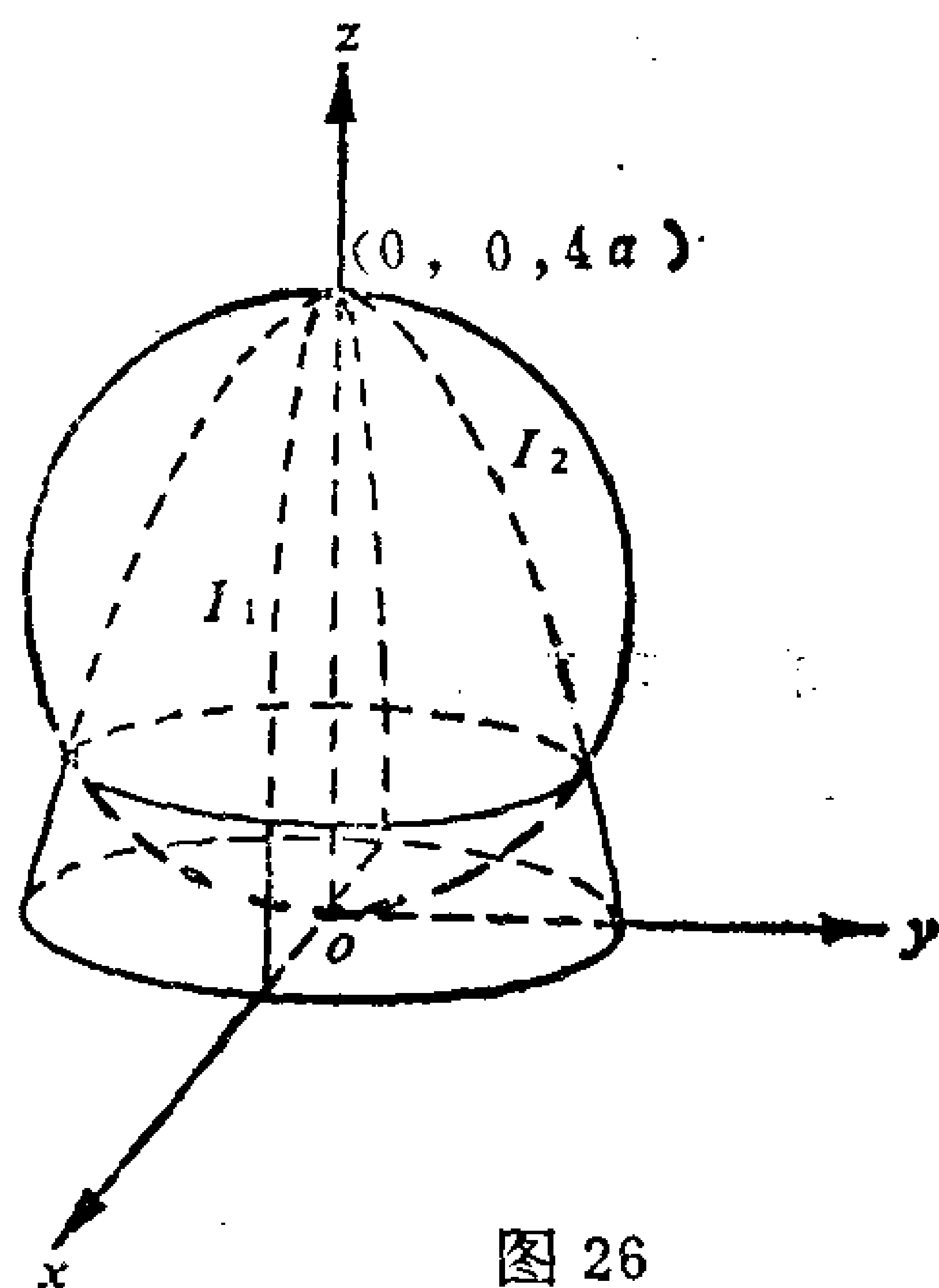


图 26

另有公共顶点$(0,0,4a)$。如图 26

设被分割的球的下部为I_1，被分割的球的上部为I_2。

用柱坐标先求上部I_2的体积V_2，则

$$V_2=\int_0^{4a}dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_{\sqrt{4a^2-az}}^{\sqrt{4az-z^2}}r\,dr$$

$$= 2\pi\int_{a}^{4a} dz \int_{\sqrt{4a^2-az}}^{\sqrt{4a^2-z^2}} r dr$$

$$= \frac{9}{2}\pi a^3$$

由于球的体积为$\frac{4}{3}\pi(2a)^3 = \frac{32}{3}\pi a^3$

$\therefore$ 下部 I_1 的体积为

$$V_1 = \frac{32}{3}\pi a^3 - \frac{9}{2}\pi a^3 = \frac{37}{6}\pi a^3$$

$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{37}{27}.$$

例 9 计算由曲面

$(a_1x + b_1y + c_1z)^2 + (a_2x + b_2y + c_2z)^2 + (a_3x + b_2y + c_3z)^2 = h^2$ 所围立体的体积。

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

解 由曲面方程可知它表示一个椭球面。

设

$$a_1x + b_1y + c_1z = u$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = v$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = w$$

则有

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)} = \Delta \neq 0$$

$$\therefore \quad \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{1}{\Delta} \neq 0.$$

所以

$$V = \frac{1}{|\Delta|}\iiint\limits_{u^2+v^2+w^2 \leq h^2} dudvdw.$$

$$=\frac{1}{|\Delta|}\cdot\frac{4}{3}\pi h^3.$$

例 10 计算由柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 所围成的立体的表面积。

解 由于对称性，只计算第一卦限部分的面积即可。如图 27

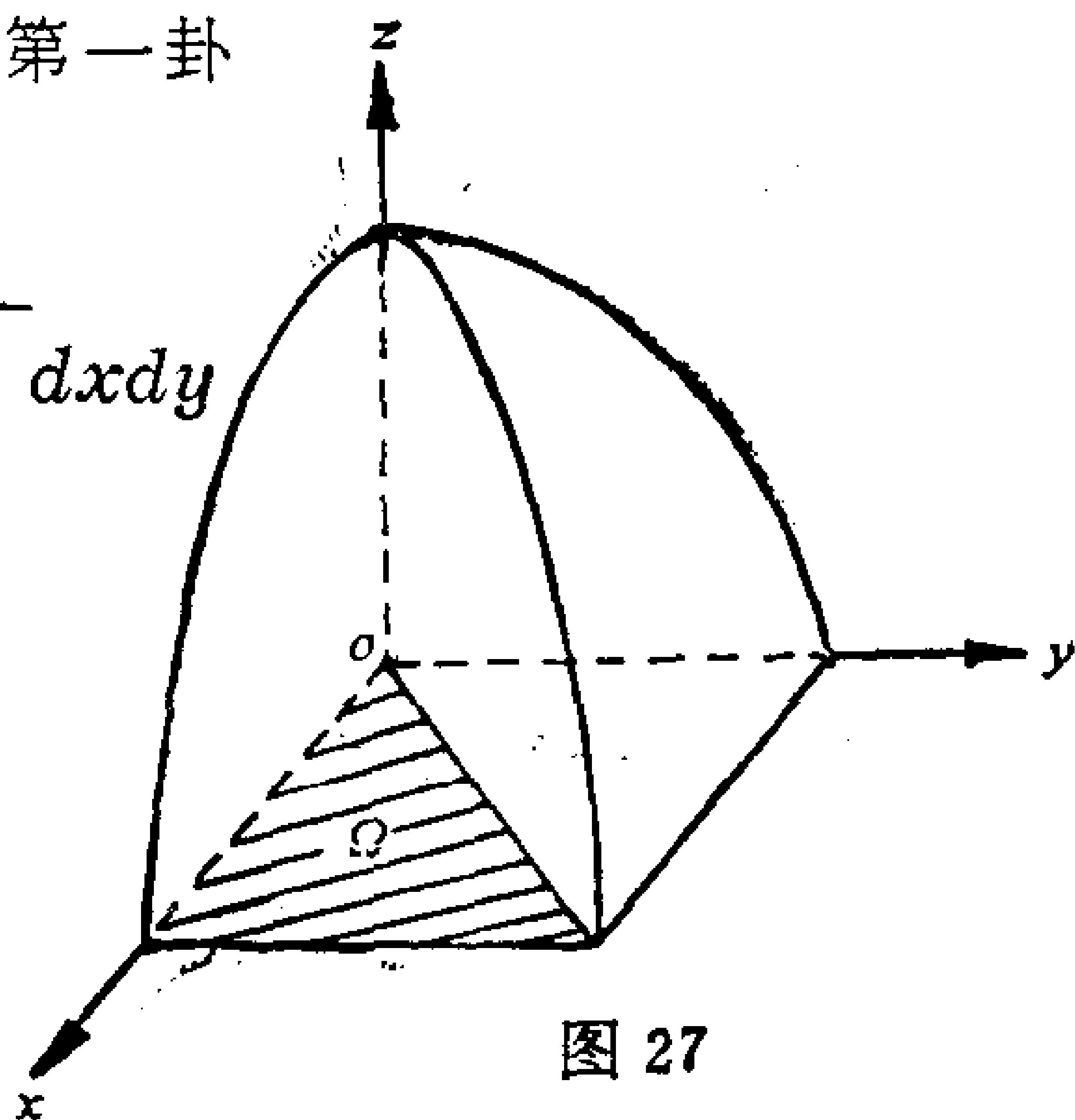


图 27

$$S=16\iint_{\Omega}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

其中 Ω 为三角形区域

$0\leqslant x\leqslant a$，$0\leqslant y\leqslant x$

$z=\sqrt{a^2-x^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\therefore\quad S=16\iint_{\Omega}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dxdy$$

$$=16\int_0^a\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\int_0^x dy$$

$$=16a^2.$$

例 11 求曲面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 内的部分的面积。

解 在 xy 坐标平面内 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 为双纽线，化为极坐标形式则为 $r^2=a^2\sin 2\varphi$。它的图象在第一、三象限内关于原点对称。且曲面 $x^2+y^2=2az$ 关于 z 轴对称，所以只需求第一卦限内的面积即可。

$$z=\frac{1}{2a}(x^2+y^2),\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{a}.$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}}$$

命 Ω 为双纽线在第一象限所围区域，则

$$S=\frac{2}{a}\iint\limits_{\Omega}\sqrt{a^2+x^2+y^2}\,dxdy$$

引用极坐标变换得

$$S=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{a\sqrt{\sin 2\varphi}}\sqrt{a^2+r^2}\,rdr$$

$$=\frac{a^2}{9}(20-3\pi).$$

例 12 计算以原点为心半径为 R 的球壳被两条纬线和两条经线所限部分的面积。

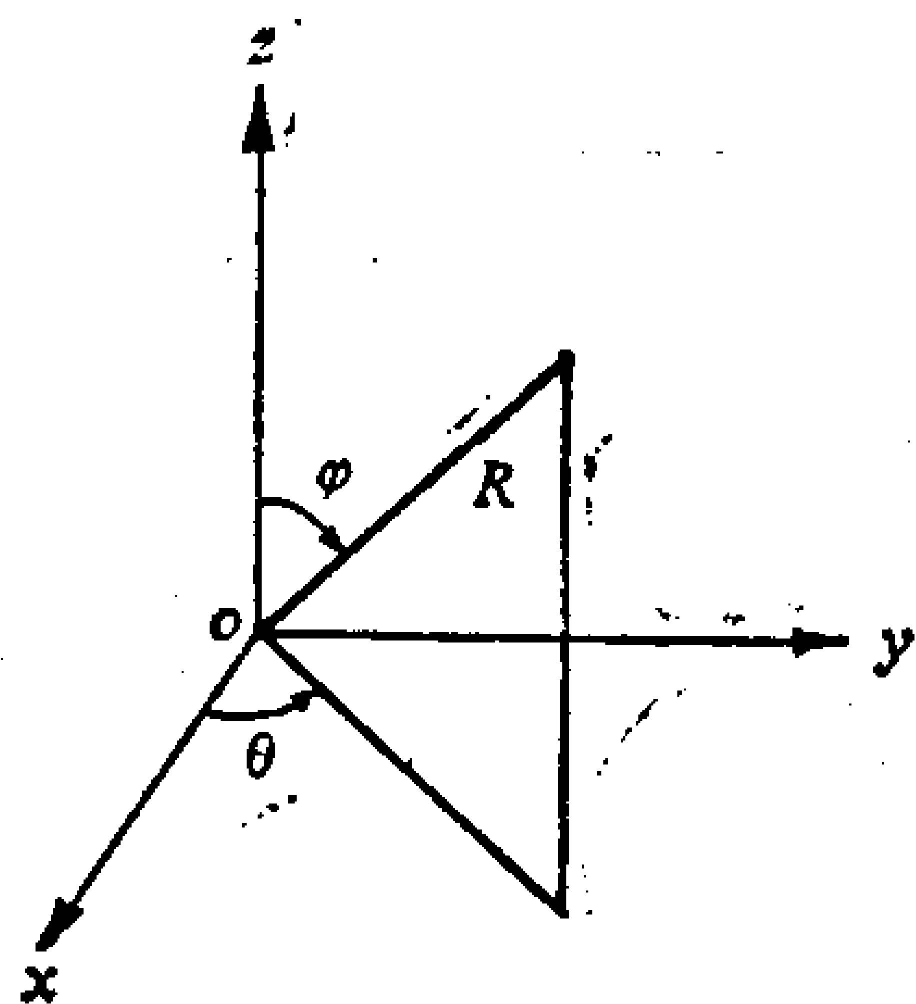


图 28

解 从球坐标变换知道球面的参数方程为

$$x=R\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=R\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=R\cos\varphi$$

则

$$E=\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2$$

$$=R^2$$

$$G=\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)^2$$

$$=R^2\sin^2\varphi$$

$$F=\frac{\partial x}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}+\frac{\partial y}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}+\frac{\partial z}{\partial\varphi}\,\frac{\partial z}{\partial\theta}$$

$$=0$$

$\therefore \quad \sqrt{EG-F^2}=R^2\sin\varphi$

积分域为

$$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2,\ \varphi_1\leqslant\varphi\leqslant\varphi_2.$$

$$\therefore \quad S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1}^{\theta_2}R^2\sin\varphi d\theta$$

$$=R^2(\theta_2-\theta_1)(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2).$$

以下各题可作为习作课的选题：

1. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^3=3xyz$ 围成的立体体积。

$\left(答：\frac{1}{2}\right)$.

2. 求曲面 $z=x^2+y^2$，$z=2x^2+2y^2, xy=a^2, xy=2a^2$，$x=2y$，$2x=y(x>0,y>0)$围成的立体体积．$\left(答：\frac{9}{4}a^4\right)$.

3. 求由下面曲线所围区域的面积。

$$x+y=a,\ x+y=b,\ y=\alpha x,\ y=\beta x,$$

$0<a<b$，$0<\alpha<\beta$. $\left(答：\dfrac{(b^2-a^2)(\beta-\alpha)}{2(\alpha+1)(\beta+1)}\right)$.

4. 求由六个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm h_1$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=\pm h_2$$
$$a_3x+b_3y+c_3z=\pm h_3$$

所围成的斜平行六面体的体积．其中

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0.\quad \left(答：\frac{8h_1h_2h_3}{|\Delta|}\right).$$

5. 计算曲面

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

所围的立体体积。　　$\left(答：\frac{4}{35}\pi abc\right)$。

（提示：令　$x=ar\sin^3\varphi\cos^3\theta$　$0\leqslant r\leqslant 1$

$y=br\sin^3\varphi\sin^3\theta$　$\theta\leqslant\varphi\leqslant\pi$

$z=cr\cos^3\varphi$　$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$）

6. 计算螺旋面

$x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $z=h\varphi$, $0\leqslant r\leqslant a$,

$0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$

的面积($h>0$)　$\left(答：\pi\left(a\sqrt{a^2+h^2}+h^2\ln\frac{a+\sqrt{a^2+h^2}}{h}\right)\right)$。

二、重积分的物理应用

重积分有丰富的物理背景，反过来又广泛用于物理，尤其是力学之中。在数学分析课中主要讲过以下公式。

设 $\rho(x,y,z)$ 表示质量分布在空间几何体 V 上任意一点 $\rho(x,y,z)$ 的密度函数，它在 V 上连续。

1. 空间几何体 V 的质量为

$$M=\iiint\limits_V \rho dxdydz.$$

2. 空间几何体 V 的质心。

设 V 的质量是 M，则质心的坐标为(α,β,γ)。这里

$$\alpha=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho xdxdydz.$$

$$\beta=\frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho ydxdydz.$$

$$\gamma = \frac{1}{M}\iiint\limits_V \rho z dxdydz.$$

3. 转动惯量.

空间几何体 V 对于 x 轴、y 轴、z 轴的转动惯量分别为

$$I_x = \iiint\limits_V \rho\cdot(y^2 + z^2)dxdydz.$$

$$I_y = \iiint\limits_V \rho\cdot(x^2 + z^2)dxdydz.$$

$$I_z = \iiint\limits_V \rho\cdot(y^2 + x^2)dxdydz.$$

4. 引力. 设 $M(x_0, y_0, z_0)$ 为空间几何体 V 之外且具有单位质量的质点. 则 V 对于 M 点的引力在三个坐标轴上的分量分别为

$$F_x = k\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)(x - x_0)}{r^3}dxdydz.$$

$$F_y = k\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)(y - y_0)}{r^3}dxdydz.$$

$$F_z = k\iiint\limits_V \frac{\rho(x,y,z)(z - z_0)}{r^3}dxdydz.$$

其中k为引力常数, $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

例 1 设球 $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az$ 中各点的密度与坐标原点到此点的距离成反比. 即

$$\rho(x,y,z) = k\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

求球的质量及质心.

解 $M = \iiint\limits_V \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}dxdydz$

$$=\int_0^{2a} kdz\iint\limits_{\Omega_z}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中 Ω_z 表示平面区域 $x^2+y^2\leqslant 2az-z^2(0\leqslant z\leqslant 2a)$ 经极坐标变换得

$$\iint\limits_{\Omega_z}\frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2az-z^2}}\frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}}$$

$$=2\pi(\sqrt{2az}-z).$$

$$\therefore\quad M=\int_0^{2\pi}2\pi k(\sqrt{2az}-z)\,dz$$

$$=\frac{4}{3}\pi k a^2.$$

设质心的坐标为 (ξ,η,ζ)，由 V 的对称性知 $\xi=\eta=0$.

$$\zeta=\frac{1}{M}\iiint\limits_V\rho(x,y,z)zdxdydz$$

$$=\frac{1}{M}\iiint\limits_V\frac{kz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$$

$$=\frac{1}{\frac{4}{3}\pi k a^2}\cdot\frac{16}{15}\pi k a^3$$

$$=\frac{4}{5}a.$$

例2 求由 $z=x^2+y^2$，$2z=x^2+y^2$，$x+y=1$，$x+y=-1$，$x-y=1$，$x-y=-1$ 所围成的几何体 V（设它的密度恒为 1）的质心。

解 设质心坐标为 (ξ,η,ζ)，由 V 的对称性知 $\xi=\eta=0$。为计算方便，作变量替换

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}(u+v)。$$

即

$$u=\sqrt{2}(x+y),\ v=\sqrt{2}(y-x).$$

则上述六曲面方程化为

$$z=u^2+v^2,\ 2z=u^2+v^2$$

$$u=\frac{1}{\sqrt{2}},\ u=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ v=\frac{1}{\sqrt{2}},\ v=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

则

$$M=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}du\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dv\int_{\frac{1}{2}(u^2+v^2)}^{u^2+v^2}dz$$

$$=\frac{1}{3}.$$

$$\xi=\frac{1}{M}\iiint\limits_V zdxdydz$$

$$=\frac{1}{M}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}du\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dv\int_{\frac{1}{2}(u^2+v^2)}^{u^2+v^2}zdz$$

$$=3\cdot\frac{7}{60}$$

$$=\frac{7}{20}。$$

例 3 求由圆 $x^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2$,

$x^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{b}{2}\right)^2$ $(b>a)$所围图形 D 的质心(密度恒为1)。

解 二圆写作极坐标方程形式

$$r=a\sin\theta,\ r=b\sin\theta \quad -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$$ 设质心坐标为 (ξ,η)，由对称性知 $\xi=0$。

显然 $M=\pi\left(\frac{b}{2}\right)^2-\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{4}(b^2-a^2)$。

则
$$\eta=\frac{1}{M}\iint\limits_D ydxdy$$
$$=\frac{1}{M}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{a\sin\theta}^{b\sin\theta}r\sin\theta rdr$$
$$=\frac{1}{3M}(b^3-a^3)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta$$
$$=\frac{\pi}{8M}(b^3-a^3)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}.$$

例 4 求半径为 R，高为 h 的均匀圆柱体 V 绕着过其中心且垂直于母线的轴旋转时的转动惯量。

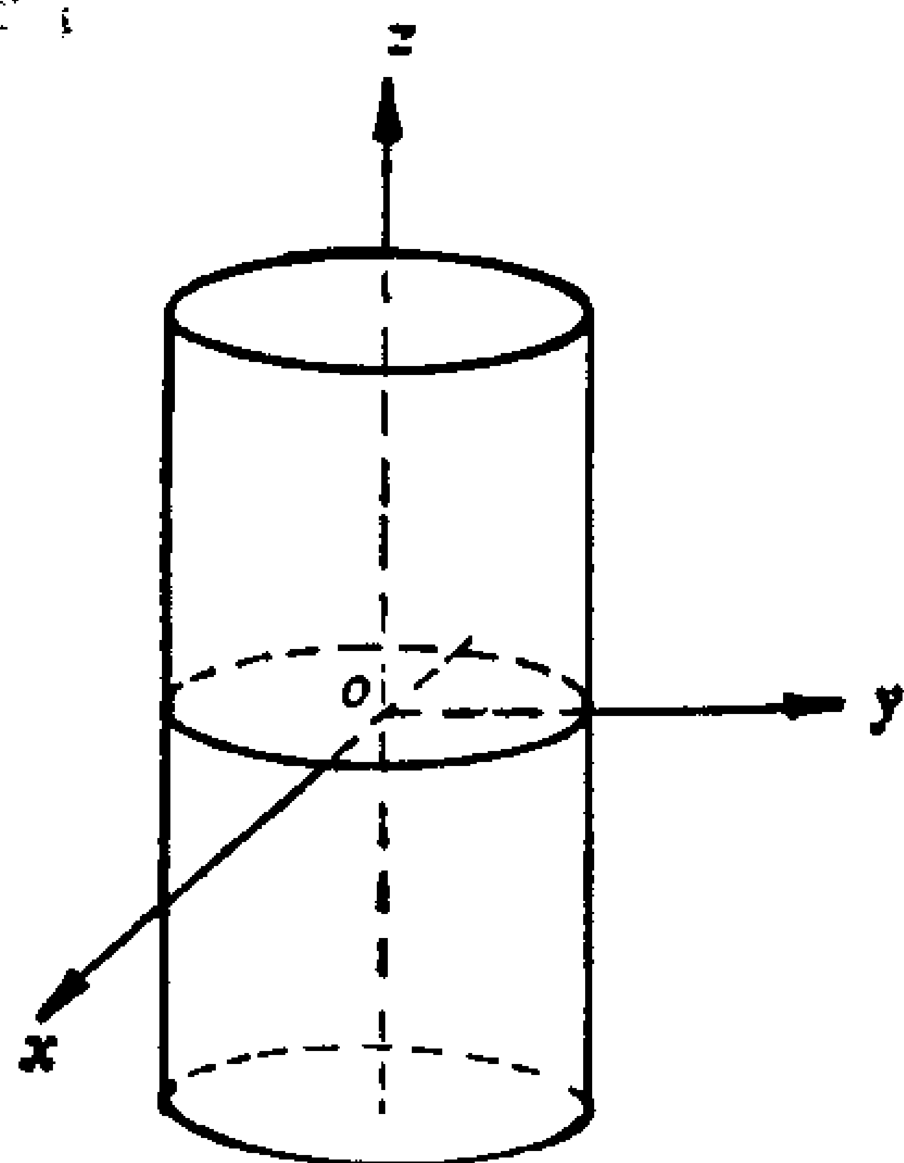


图 29

解 先建立坐标系如图，旋转轴为 x 轴，过中心平行于母线的轴为 z 轴，中心为原点。

则
$$I_x=\iiint\limits_V(y^2+z^2)dxdydz$$

利用柱坐标变换得到
$$I_x=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R rdr\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}(r^2\sin^2\theta+z^2)dz$$

$$=\frac{\pi h R^2}{4}\left(R^2+\frac{h^2}{3}\right).$$

例 5 设 I_z 为空间某物体 V 对 z 轴的转动惯量，l 为平行于 z 轴的轴，它通过 V 的质心且与 z 轴的距离为 d，M 为 V 的质量。证明

$$I_z=I_l+Md^2.$$

其中 I_l 是 V 对于 l 轴的转动惯量。

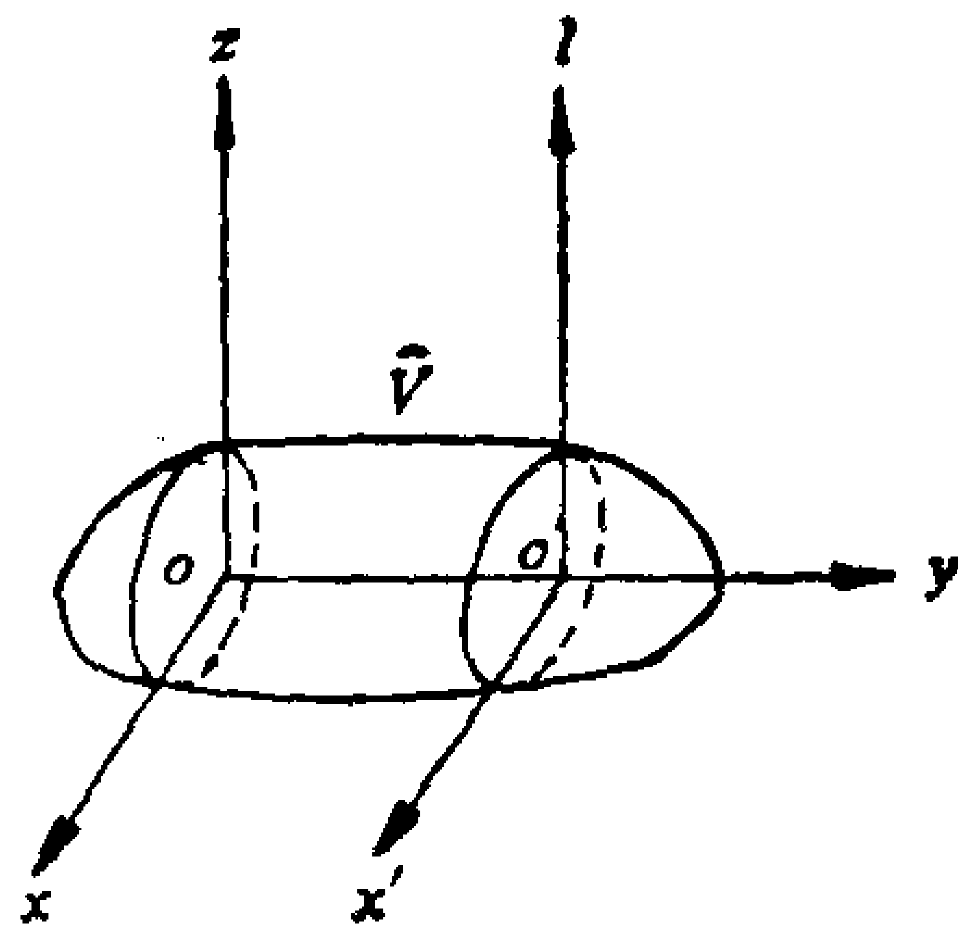


图 30

证 先用 I_z 的相关轴为空间直角坐标系的 z 轴建立坐标系。设 V 的质心为 o'，不妨设 o' 在 y 轴上，坐标为 $(0, d, 0)$，再以 o' 为原点平移坐标轴，得新坐标系 $o'—x'yl$。按普通习惯说它是 $o'—x'y'z'$。

显然

$$I_z=\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz.$$

$$I_l=\iiint_V (x'^2+y'^2)\,dx'dy'dz'$$

已知 $x=x'$，$y=y'+d$，$z=z'$

所以

$$I_z=\iiint_V (x^2+y^2)\,dxdydz$$

$$=\iiint_V [x'^2+(y'+d)^2]\,dx'dy'dz'$$

$$=\iiint_V (x'^2+y'^2+2dy'+d^2)\,dx'dy'dz'$$

由于 o' 是物体 V 的质心，它又是新坐标系的原点， 所以 V 在新坐标系下的质心坐标 (x_0', y_0', z_0') 是 $(0,0,0)$，那么 $y_0'=0$。从而

$$y_0' = \frac{1}{M}\iiint\limits_V y'\,dx'\,dy'\,dz' = 0.$$

将此式代入(*)式即得

$$I_z = I_l + Md^2.$$

例 6 求密度为 ρ_0 的均匀圆柱体 V：$x^2+y^2\leqslant a^2$，$0\leqslant z\leqslant h$ 对于单位质点 $P(0,0,b)$ 的引力。圆柱体质量为 M。

解 设圆柱体对质点 P 的引力 F 在坐标轴上的分量为 F_x, F_y, F_z

图 31

由 V 的对称性知

$F_x = F_y = 0$.

若引力常数为 k，则

$$F_z = k\iiint\limits_V \frac{(z-b)\,dxdydz}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}}$$

$$= k\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2} dxdy\int_0^h \frac{(z-b)dz}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{3/2}}$$

$$= \frac{2kM}{a^2h}\left[\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+(h-b)^2} - |b| + |h-b|\right]$$

重积分在力学中应用非常广泛。如计算压力、做功等。由于这部分内容在定积分的应用中做过许多练习，这里就不再讲了。另外还应看到重积分在物理的其它领域如电学、原

子物理学以及化学、生物学等方面也有广泛应用。

以下各题可作为习作课的选题：

1. 设空间单位立方体 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1, 0\leqslant z\leqslant 1$ 上密度函数为 $\rho(x,y,z)=x+y+z$，求它的质量。（答：$\frac{3}{2}$）

2. 求由抛物柱面 $y=\sqrt{x}$，$y=2\sqrt{x}$ 及 $z=0$，$z+x=6$ 所围成的几何体的质量，设其密度恒为1。$\left(答：\frac{48}{5}\sqrt{6}\right)$

3. 一正圆锥体 V 高为 $h(h>1)$。其轴与母线夹角为 α。一平面 π 过圆锥顶点且垂直于 V 的轴，设 V 上点 P 处的密度与 P 到 π 的距离的 n 次方成正比 $(n>1)$。且当 P 到 π 的距离为 1 时密度为 k。求 V 的质量。$\left(答：\frac{k\pi}{n+3}h^{n+3}\,\mathrm{tg}^2\alpha\right)$

4. 求由 $z=1-\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=0$ 所围立体的质心坐标、设密度为 1。$\left(答：\left(0,0,\frac{1}{4}\right)\right)$

5. 球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ 内任一点 P 的密度为 P 到原点距离的平方。求它的质心坐标。$\left(答：\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)\right)$

6. 求均匀空间体 V：$x^2+y^2+z^2\leqslant 2$，$x^2+y^2\geqslant z^2$ $(z\geqslant 0)$ 关于 z 轴的转动惯量。$\left(答：\frac{4\pi}{15}\left(4\sqrt{2}-5\right)\right)$

7. 求由以下曲面所围的均匀体 V 对于 z 轴的转动惯量。$z=x^2+y^2$，$x+y=1, x+y=-1, x-y=1, x-y=-1$。$z=0$。$\left(答：\frac{14}{45}\right)$

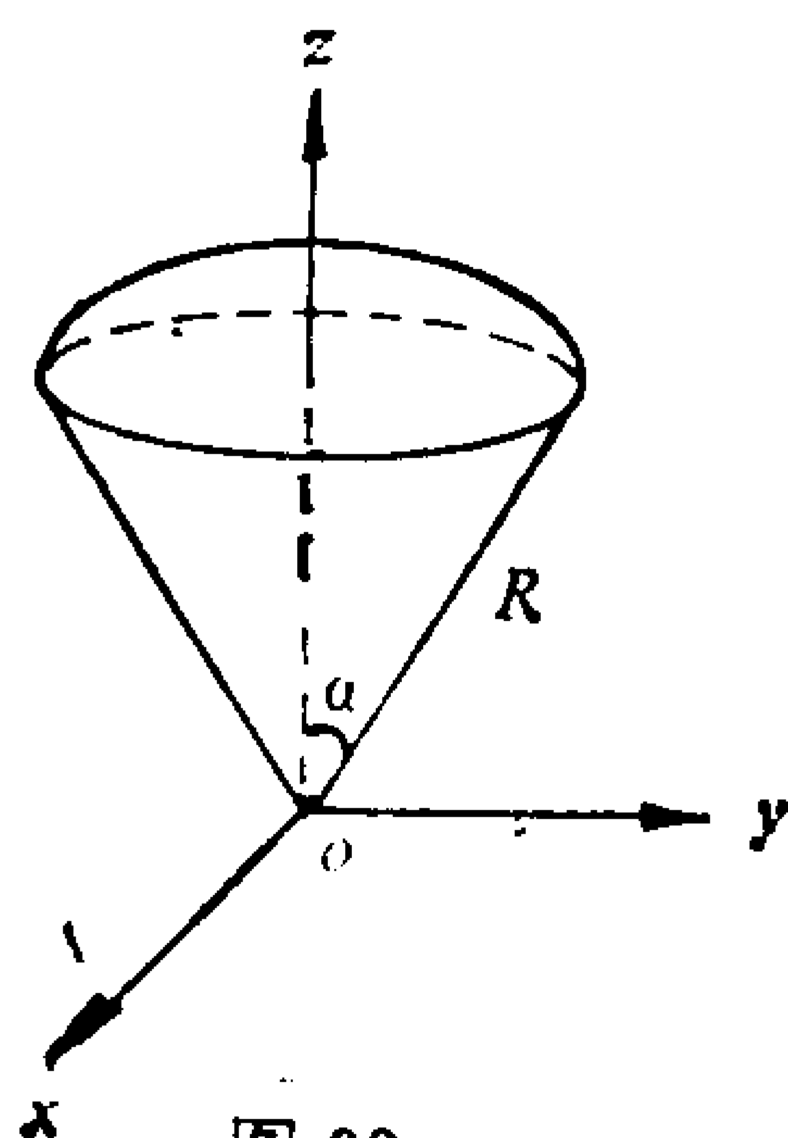


图 32

8． 求密度为 ρ_0 的均匀球锥体对于位于其顶点的单位质点的引力．球半径为 R，其轴截面的扇形角为 2α。（答： $k\pi\rho_0 R\sin^2\alpha$）

第十五章　曲线积分和曲面积分

曲线积分和曲面积分来源于物理中的实际问题，如变力沿曲线作功和流体通过曲面的流量等。它们是解决偏微分方程的基本工具；曲线积分是复变函数积分的基础。因此，读者要深刻理解这两个概念，并能熟练地进行计算。本章所举例题大多可以作为学生的练习。

§1　曲线积分

1.　第一型曲线积分的定义和计算

定义　设$\widehat{AB}$是分段光滑可求长的平面曲线段，函数$z=f(M)$是定义在$\widehat{AB}$上的有界函数。

任给$\widehat{AB}$一个分割T，分点为：

$$A=A_0,\ A_1,\ \cdots,\ A_i,\ \cdots,\ A_n=B$$

在$\widehat{A_{i-1}A_i}$上任取一点M_i，做和

$$\sum_{i=1}^{n}f(M_i)\Delta s_i$$

其中Δs_i为弧段$\widehat{A_{i-1}A_i}$的弧的长。

令$d=\max\limits_{1\leq i\leq n}\{\Delta s_i\text{的直径}\}$

如果不管分割T如何，也不管点$M_i\in\widehat{A_{i-1}A_i}$如何取，只

要最大子弧长 $d\to 0$，极限

$$\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$$

存在，便称此极限为函数 $f(M)$ 沿曲线 $\widehat{AB}$ 从 A 到 B 的第一类曲线积分，也叫做对弧长的曲线积分。记作

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds$$

从定义可以知道，它是小弧段上点的函数值与小弧段长的乘积的和式的极限，这个极限与曲线段 $\widehat{AB}$ 的方向无关，即

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds=\int_{\widehat{BA}} f(x,y)\,ds$$

第一类曲线积分和定积分不同，对于有界函数 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$，在定义定积分时，已经假定了 $a<b$。这时

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

其中 $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i>0$，$\lambda=\max\{\Delta x_i\}$。注意右端的积分和是法定的格式，各分点一定要由 a 而 x_1 而 $x_2\cdots$最后到 b。

对于 $a>b$ 的情形，按照法定的格式来说，仍然要把积分写成

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

但是这时分点的大小顺序为：

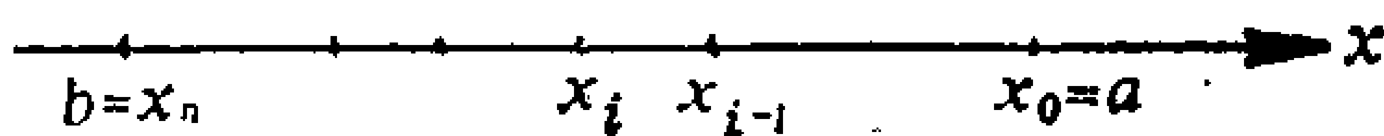


图 1

$$b=x_n<x_{n-1}<\cdots<x_0=a$$

于是 $\underset{1\leqslant i\leqslant n}{\Delta x_i}=x_i-x_{i-1}<0$，可见这时实际是

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})$$

$$=-\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\ (x_{i-1}-x_i)=-\int_b^a f(x)dx.$$

因此，定积分是与积分限的顺序有关。尽管如此，第一类曲线积分还是往往要化为定积分进行计算。读者注意到上述区别对于理解第二类曲线积分的概念是有益的。

2. 第一类曲线积分的计算。

1) 设函数 $f(x,y)$ 在光滑曲线段 $\widehat{AB}$ 上连续，$\widehat{AB}$ 的方程为

$$\begin{aligned}x&=x(t)\\y&=y(t)\end{aligned}\qquad (t_0\leqslant t\leqslant T)$$

则

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)ds=\int_{t_0}^T f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \tag{1}$$

如果曲线段 $\widehat{AB}$ 的方程为：$y=\varphi(x),a\leqslant x\leqslant b$，那么有

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx \tag{2}$$

如果曲线段 $\widehat{AB}$ 的方程为：$x=x(s)$，$y=y(s)$，$0\leqslant s\leqslant L$，其中 L 是 $\widehat{AB}$ 的长度，s是弧长变量，则有

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y)ds=\int_0^L f(x(s),y(s))ds \tag{3}$$

第一型典线积分是绝对量，定义中已经交代明白，求这

绝对量是技术问题，借定积分求第一类曲线积分是用得较多的技术，因此应该以这技术为重点把计算与概念揉合起来。

这里的关键是必须 $ds>0$，ds 是 dt（或 dx）的线性函数，ds 的符号与 dt（或 dx）的符号有密切关系，dt（或 dx）的符号又与定积分的积分后面的方向与 dt（或 dx）的符号按定积分的定义搭配好（这是第一步），然后再按 $ds>0$ 的要求把 dt（或 dx）与 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$（或 $\sqrt{1+\varphi'^2(x)}$）的符号搭配好，才能得出期望的结果。

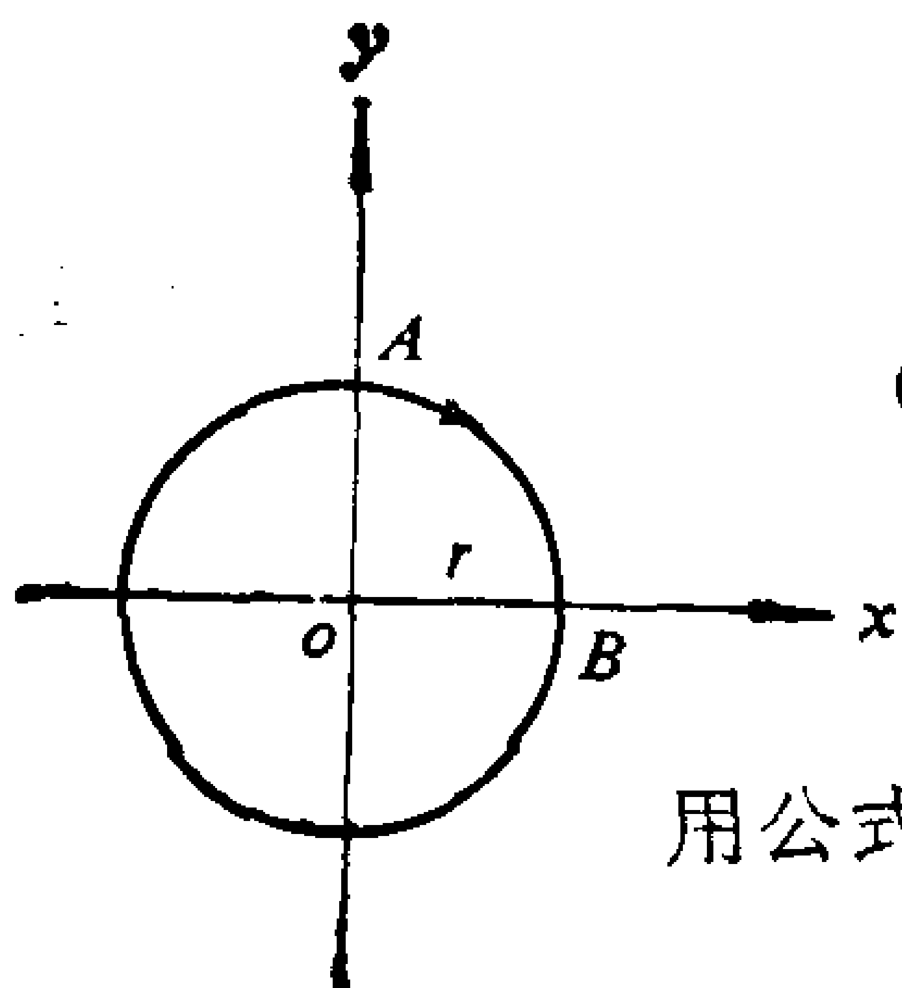


图 2

例 1 求圆的周长。

解 设圆的方程为：$x^2+y^2=r^2$，$0\leqslant x\leqslant r$。则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

用公式：$s=\int_{\overset{\frown}{AB}} f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$

则

$$\frac{s}{4}=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx$$

$$=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=\frac{\pi r}{2}$$

$\therefore\quad s=2\pi r$。

上例的另一解法：

$$\frac{s}{4}=\int_{\overset{\frown}{BA}} f(x,y)\,ds$$

这时积分路线的方向虽然改变了，可以计算如下：

$$\frac{S}{4}=\int_{\widehat{BA}} f(x,y)\,ds=-\int_r^0\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=\frac{\pi r}{2}$$

由上面例题可以知道，所求圆周长是不计方向的，属于第一类曲线积分，那么一定要 $ds>0$，而 $ds=\pm\sqrt{1+\varphi'^2(x)}\,dx$，那么如果认为 $dx>0$，就要在根号前取正号，同时要 0 为下限，r 为上限，这是第一种解法．如果认为 $dx<0$，就要根号前取负号，同时要 r 为下限，0 为上限，这是第二解法，

求（图 3）中曲线段 $\widehat{AC}$ 的弧长，则

$$\int_{\widehat{AC}} f(x,y)\,ds=\int_{\widehat{AB}} f(x,y)\,ds+\int_{\widehat{BC}} f(x,y)\,ds$$

$$=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$+\int_{\frac{r}{2}}^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r+$$

$$+r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_{\frac{r}{2}}^r$$

$$=r\pi-\frac{r\pi}{6}=\frac{5\pi r}{6}$$

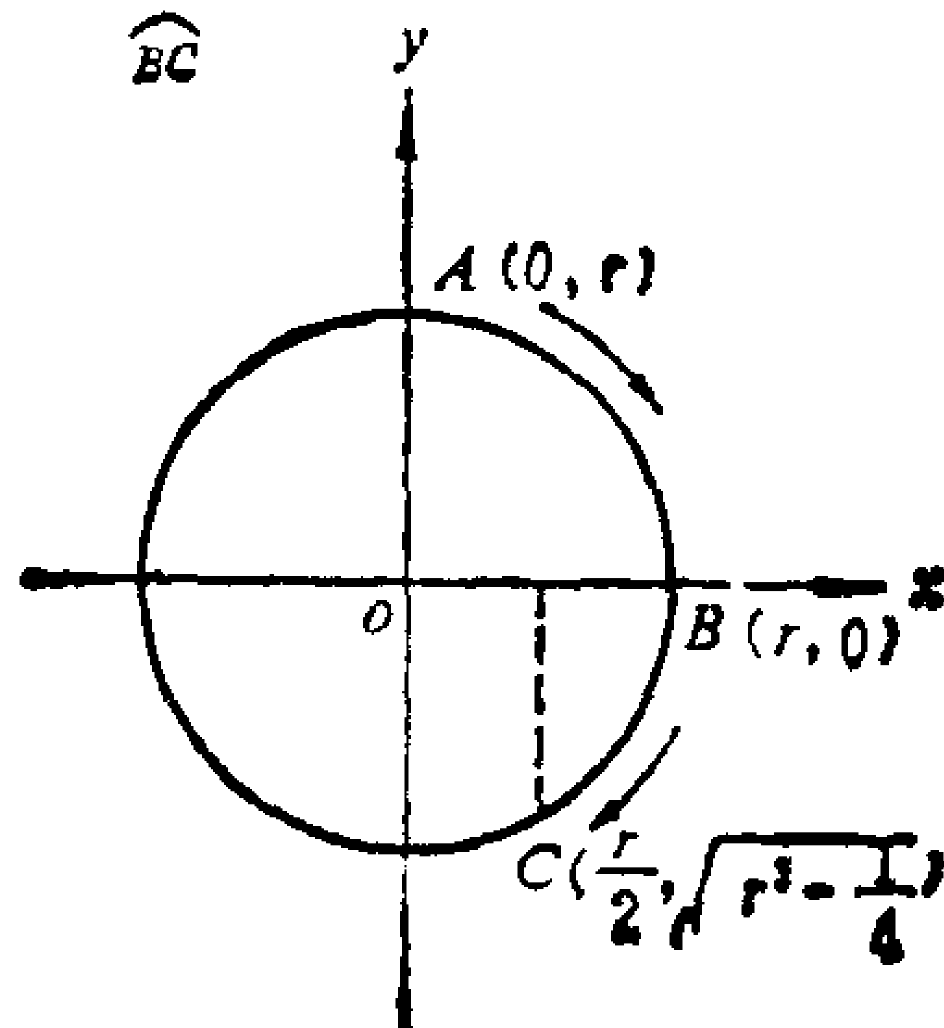


图 3

上题不能如下直接计算：

$$\int_{\widehat{AC}} f(x,y)\,ds=\int_0^{\frac{r}{2}}\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^{\frac{r}{2}}$$

$$=\frac{\pi r}{6}$$

因为曲线从 A 描画到 C 时，x 自 0 增加到 r，再由 r 减少到 $\frac{r}{2}$，因此，在求 A 到 C 这段曲线的积分时必须分段计算以保证 dx 取正值。

例 2 若曲线 (L) 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在第一象限部分。计算积分

$$I=\int_{(L)} xyds$$

解 椭圆的参数方程：$x=a\cos t$，$y=b\sin t$，$0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}$。

则

$$ds=\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

由公式（1）：

$$\int_{(L)} f(x,y)\,ds=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, b\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,dt$$

$$=\frac{ab}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2t\sqrt{a^2\frac{1-\cos 2t}{2}+b^2\frac{1+\cos 2t}{2}}\,dt$$

这里令 $\cos 2t=u$，则 $\sin 2tdt=-\frac{1}{2}du$。于是

$$I=\frac{ab}{4}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}u}\,du$$

$$=\frac{ab}{4}\cdot\frac{2}{b^2-a^2}\cdot\frac{2}{3}\left[\frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2-a^2}{2}u\right]^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{ab}{3}\ \frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$$

若用公式（2)则

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\quad ds=\sqrt{1+y'^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}$$

$$\therefore\quad I=\int_0^a x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\cdot\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}}dx$$

将此积分算出，也可得到上面的结果．但利用公式(2）计算时，有一点需要注意：当 $x=a$ 时椭圆的切线斜率为无穷大，化简被积函数时侥幸地消去了一个可去间断点。而利用公式(1）计算就没有这个毛病。

例 3 计算积分

$$\int_{(L)}(x^2+y^2)ds$$

其中(L)为以$O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,1)$为顶点的三角形围线．（图 4)

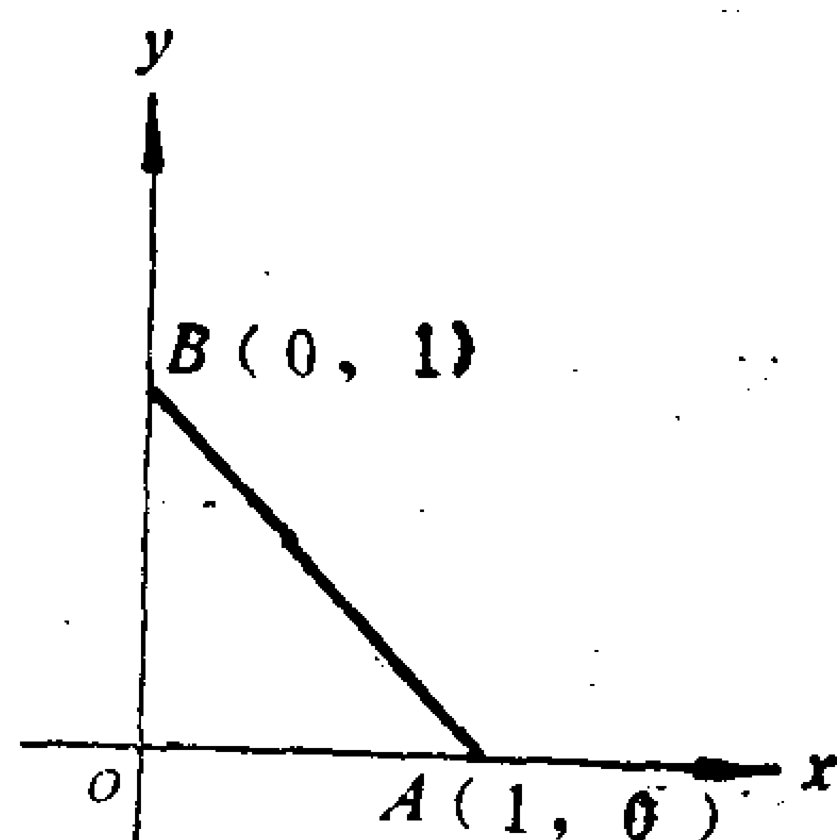


图 4

解 $$\int_{(L)}(x^2+y^2)ds=\int_{\overline{OA}}(x^2+y^2)ds+\int_{\overline{AB}}(x^2+y^2)ds+$$

$$+\int_{\overline{OB}}(x^2+y^2)ds$$

在线段 $\overline{OA}$ 上，$y=0$，$ds=dx$，故得

$$\int_{\overline{OA}}(x^2+y^2)ds=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

在线段 $\overline{OB}$ 上，$x=0$，$ds=dy$，故得

$$\int_{\overline{OB}}(x^2+y^2)ds=\int_0^1 y^2dy=\frac{1}{3}.$$

在线段 $\widehat{AB}$ 上，$y=1-x, ds=\sqrt{2}dx$，故得

$$\int_{\overline{AB}}(x^2+y^2)ds=\int_0^1[x^2+(1-x)^2]\sqrt{2}dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

由此得

$$\int_{(L)}(x^2+y^2)ds=\frac{2}{3}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

例 4 曲线（L）若用极坐标方程 $r=r(\theta)$，$\theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2$ 给出，且 $r'(\theta)$ 连续，试求

$$\int_{(L)}f(x,y)ds$$

的计算公式

解 $x=r(\theta)\cos\theta$，$y=r(\theta)\sin\theta$，

$$ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

根据公式（1）有

$$\int_{(L)}f(x,y)ds=\int_{\theta_1}^{\theta_2}f(r(\theta)\cos\theta,$$

$$r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}d\theta$$

例 5 计算积分

$$I=\int_{(L)}|y|ds$$

其中（L）为双纽线：$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$的弧。

解 双纽线的极坐标方程为

$$r^2=a^2\ \text{cso}\ 2\varphi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

于是

$$rr'=-a^2\sin 2\varphi, r'=-\frac{a^2\sin 2\varphi}{r}$$

$$ds=\sqrt{r^2+r'^2}d\theta=\frac{a^2}{r}d\theta$$

$$I=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta\frac{a^2}{r}d\theta$$

$$=(4-2\sqrt{2})a^2$$

平面第一类曲线积分的概念和计算很容易推广为空间第一类曲线积分。如果曲线(L)是一条空间曲线，又$f(x,y,z)$是定义在（L）上的函数，则$f(x,y,z)$沿空间曲线（L）的第一类曲线积分为：

$$\int_{(L)} f(x,y,z)ds$$

若（L）的方程为：$x=x(t)$，$y=y(t)$，$z=z(t)$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 且 $x'(t)$，$y'(t)$，$z'(t)$在$[\alpha,\beta]$上连续，则

$$\int_{(L)} f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),$$

$$z(t))\sqrt{x'^2(t),z'^2(t)+y'^2(t)}dt$$

例 6 计算$\int_L x^2ds$,其中(L) 为 球 面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面$x+y+z=0$相交的圆周。

解法 1 先求曲线（L）的参数方程，由方程组

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=a^2 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad (1)$$

消去 x，得 $x^2+y^2+(x+y)^2=a^2$

或 $$x^2+y^2+xy=\frac{a^2}{2}. \qquad (2)$$

旋转坐标轴：

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}+y'\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')$$

$$y=y'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

方程（2）化为

$$3x'^2+y'^2=a^2$$

设

$$\begin{cases} x'=\frac{a}{\sqrt{3}}\cos\theta \\ y'=a\sin\theta \end{cases} \qquad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi$$

得到所求圆周的参数方程：

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta-\sin\theta\right) \\ y=\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta+\sin\theta\right) \\ z=-\sqrt{\frac{2}{3}}a\cos\theta \end{cases} \quad 0\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

于是

$$\begin{cases} x'_\theta=\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta-\cos\theta\right) \\ y'_\theta=\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta+\cos\theta\right) \\ z'_\theta=\sqrt{\frac{2}{3}}a\sin\theta \end{cases}$$

$$x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2 = a^2$$

$$\therefore \quad \int_{(L)} x^2 ds = \int_0^{2\pi} \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{3}\cos^2\theta + \sin^2\theta - \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\cos\theta\right) a d\theta$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}.$$

解法 2　由对称性知道：

$$\int_{(L)} x^2 ds = \int_{(L)} y^2 ds = \int_{(L)} z^2 ds$$

而 $$\int_{(L)} (x^2 + y^2 + z^2) ds = \int_{(L)} a^2 ds = 2\pi a^3$$

其中最末一步是借 L（大圆）的周长 $2\pi a$ 推来的。

$$\therefore \quad \int_{(L)} x^2 ds = \frac{2\pi a^3}{3}$$

2.　第二类曲线积分的定义和计算：

第二类曲线积分与第一类曲线积分不同，它不是关于弧长的积分，在直角坐标系内它是关于弧长元素在坐标轴上投影的积分，理解这个概念应该从物理实际问题如变力作功等问题入手，这样就不会感到这定义抽象了。本节一开始就讨论空间的第二类曲线积分。

定义　设 (L) 为一条光滑或逐段光滑的曲线，且设 $f(x,y,z)$ 为定义在 (L) 上的有界函数。将 (L) 沿一确定方向从起点开始用分点 $A_i(x_i, y_i, z_i)$ 分成 n 个有向弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$，$i = 1,2,\cdots,n$。且设 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$，在每一弧段 $\widehat{A_iA_{i+1}}$ 上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i, \rho_i)$，作和式：

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \rho_i)\Delta x_i$$

其中（L）的起点记为 $A(x_1,y_1,z_1)$，终点记为 $B(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$，设 $\lambda=\max\{\overline{A_iA_{i+1}}\}$，这里 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 表示有向线段 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 的长度，若当 $\lambda\to 0$ 时，和σ 有极限 I，且它与（L）的分法无关也与点 P_i 的选择无关。则称 I 为 $f(x,y,z)$沿曲线（L）按所述方向的第二类曲线积分，记作

$$I=\int_{(L)} f(x,y,z)dx \quad 或 \quad I=\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)dx$$

同样可以定义

$$\int_{(L)} f(x,y,z)dy, \qquad \int_{(L)} f(x,y,z)dz$$

考虑在（L）上定义一个向量函数 $\vec{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\vec{i}+Q(x,y,z)\vec{j}+R(x,y,z)\vec{k}$，且有向线段 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 在三个坐标轴的射影分别为 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$，$\Delta y_i=y_{i+1}-y_i$，$\Delta z_i=y_{i+1}-z_i$，于是，若下面的和

$$\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\rho_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\rho_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\rho_i)\Delta z_i]$$

当 $\lambda=\max\{\overline{A_i,A_{i+1}}\}\to 0$ 时的极限I 存在，且 I 与点 $P_i(\xi_i, \eta_i,\rho_i)$的选择和（L）的分法无关，则称 I 为向量函数 $\vec{F}(x, y,z)$沿曲线（L）从点 A 到点 B 的第二类曲线积分，记为

$$I=\int_{\widehat{AB}} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz$$

在上述第二类曲线积分定义中，形成积分和时是以函数值 $f(\xi_i,\eta_i,\rho_i)$和$\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 在坐标轴上的投影相乘，而 $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ 在任一轴上的投影是与方向有关的。方向变为反向时，投影

也变号，因此，对于第二类曲线积分有

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx+Qdy+Rdz=-\int_{\widehat{BA}} Pdx+Qdy+Rdz$$

例 1 计算积分

$$\int_{(L)} xydx+(y-x)dy$$

其中（L）分别沿（图 5）中路线 (i) $\overrightarrow{AB}$; (ii) $\widehat{ACB}$ ($y=2(x-1)^2+1$)； (iii) $\overline{ADB}$ 进行。

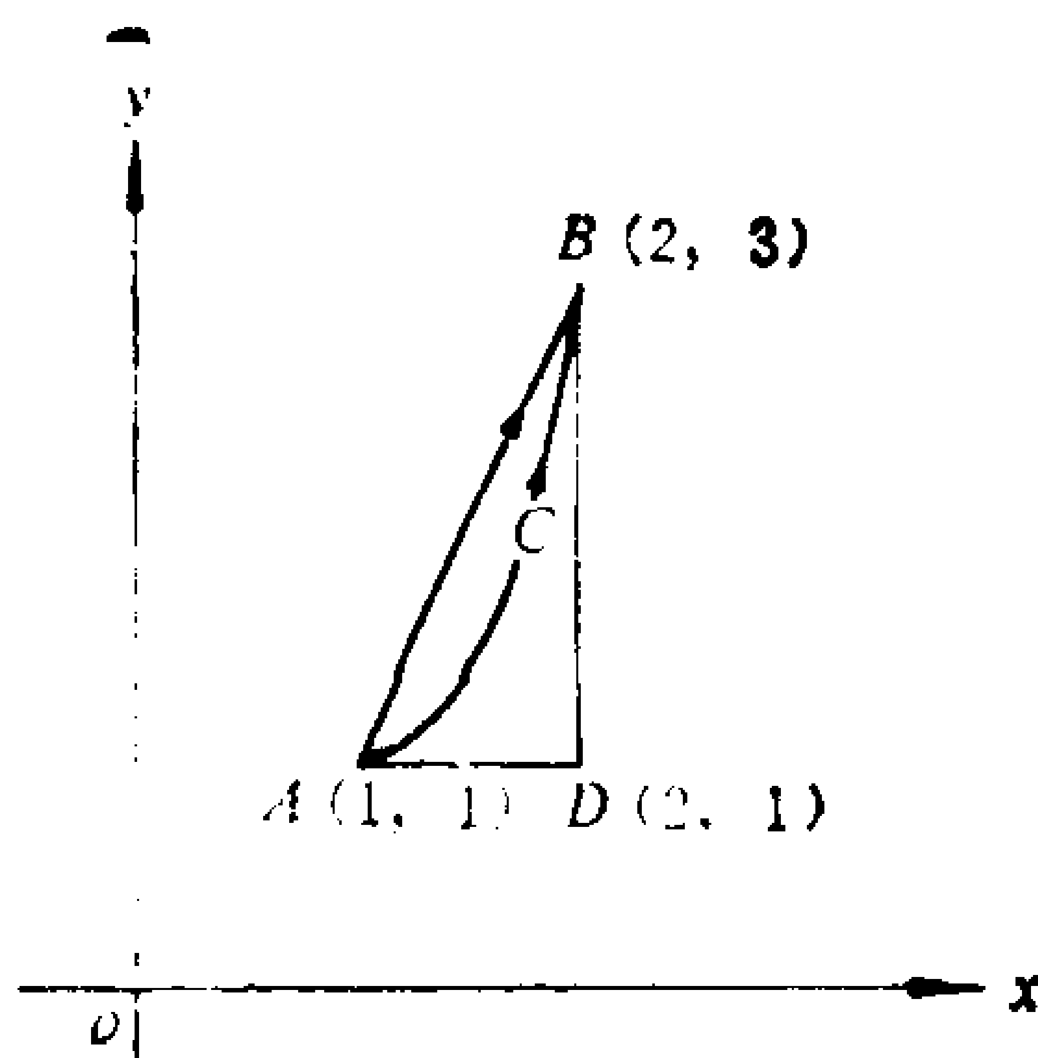


图 5

解 (1) 线段 $\overrightarrow{AB}$ 的方程可表为：

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t, \end{cases} \qquad 0\leqslant t\leqslant 1$$

于是

$$\int_{\overrightarrow{AB}} xydx+(y-x)dy$$

$$=\int_0^1 [(1+t)(1+2t)+2t]dt$$

$$=4\frac{1}{6}.$$

(ii) $$\int_{\widehat{ACB}} xydx+(y-x)dy$$

$$=\int_1^2 \{x[2(x-1)^2+1]+[2(x-1)^2+1-x]\}dx$$

$$= 2\frac{5}{6}.$$

(iii) 折线 ADB 有两段$\overline{AD}$与$\overline{DB}$，在沿直线$\overline{AD}$时，$y=1$，$x\in[1,2]$，沿直线$\overline{DB}$，$x=2$，$y\in[1,3]$。所以

$$\int_{\widehat{ADB}} xydx+(y-x)dy = \int_{\overline{AD}} xydx+(y-x)dy + \int_{\overline{DB}} xydx+(y-x)dy$$

而 $$\int_{\overrightarrow{AD}} xydx+(y-x)dy = \int_{\overline{AD}} xydx = \int_1^2 xdx = \frac{3}{2}$$

$$\int_{\overrightarrow{DB}} xydx+(y-x)dy = \int_{\overline{DB}} (y-x)dy = \int_1^3 (y-2)dy = 0$$

$$\therefore \quad \int_{\widehat{ADB}} xydx+(y-x)dy = \frac{3}{2}$$

例 2 计算积分

$$L=\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} ydx-(x-y)dy+xdz$$

积分路线如（图 6）。

(i) 直线$\overline{OP}$；(ii) 正立方体的棱 $OABP$；(iii) 直角边OBP。

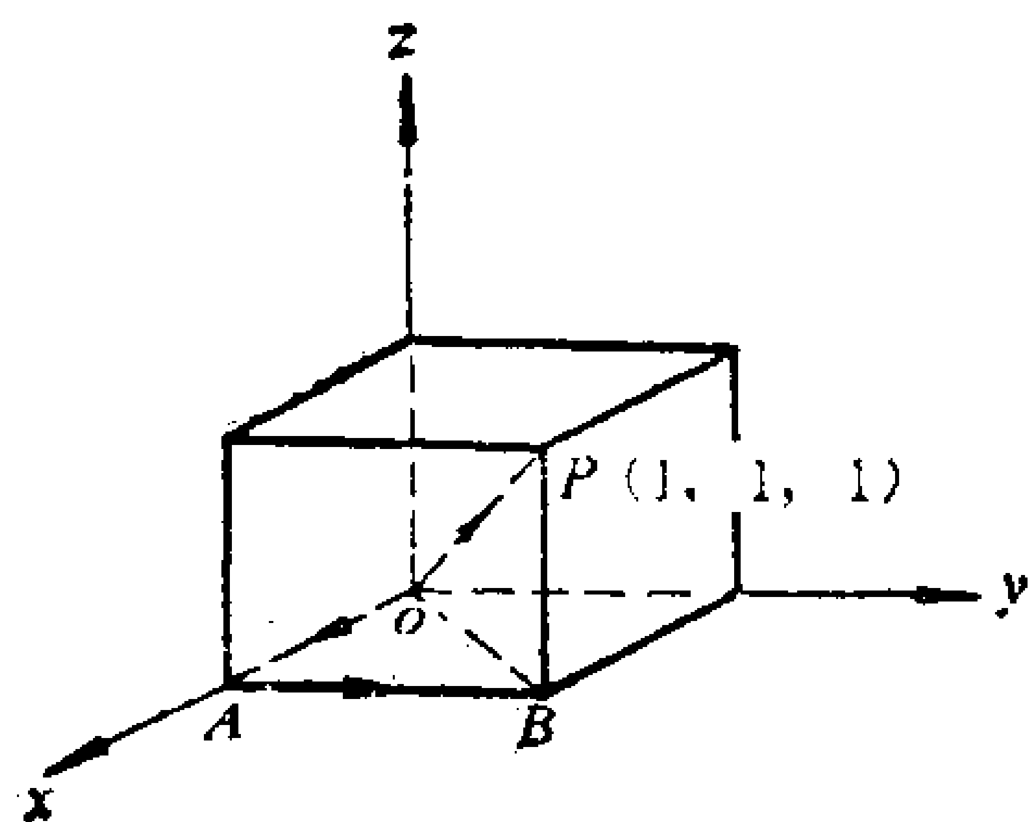


图 6

解 (i) 根据（图 6）有 $x=y=z=t$，于是 $dx=dy=dz=dt$，所以

$$L=\int_0^1 2tdt=1.$$

(ii) 把积分路线分为三部分 $\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BP}$，于

是沿$\overline{OA}$：$0\leqslant x\leqslant 1$，$y=z=0$，$dy=dz=0$，所以$L_1=\int_0^1 0\,dx=0$。沿$\overline{AB}$：$0\leqslant y\leqslant 1, x=1$，$z=0$，$dx=dz=0$，所以$L_2=-\int_0^1(1-y)dy=-\frac{1}{2}$。沿$\overline{BP}$：$0\leqslant z\leqslant 1$，$x=y=1$，$dx=dy=0$所以$L_3=\int_0^1 dz=1$

$$\therefore\quad L=L_1+L_2+L_3=\frac{1}{2}.$$

(iii)　把积分路线分成两部分$\overline{OB}+\overline{BP}$，于是沿$\overline{OB}$有$x=y=t$，$z=0$，$dx=dy=dt$，$dz=0$，所以$L_1=\int_0^1 t dt=\frac{1}{2}$，而沿$\overline{BP}$，由（ii）有$L_2=1$，于是$L=\frac{3}{2}$。

例3　计算积分

$$I=\int_{(L)}\vec{F}\cdot\vec{ds}$$

其中$\vec{F}=(x^2+5y+3yz)\vec{i}+(5x+3xz-2)\vec{j}+(3xy-4z)\vec{k}$

(i) 积分路线（L）是由A沿螺旋线L_1到B(如图7)，螺旋线L_1的方程是：

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=\dfrac{c}{2\pi}t\end{cases}$$

(ii)　积分曲线（L）由A沿直线L_2到B。

解　(i)　当$t=0$时，$x=a$，$y=0$，$z=0$对应的点是

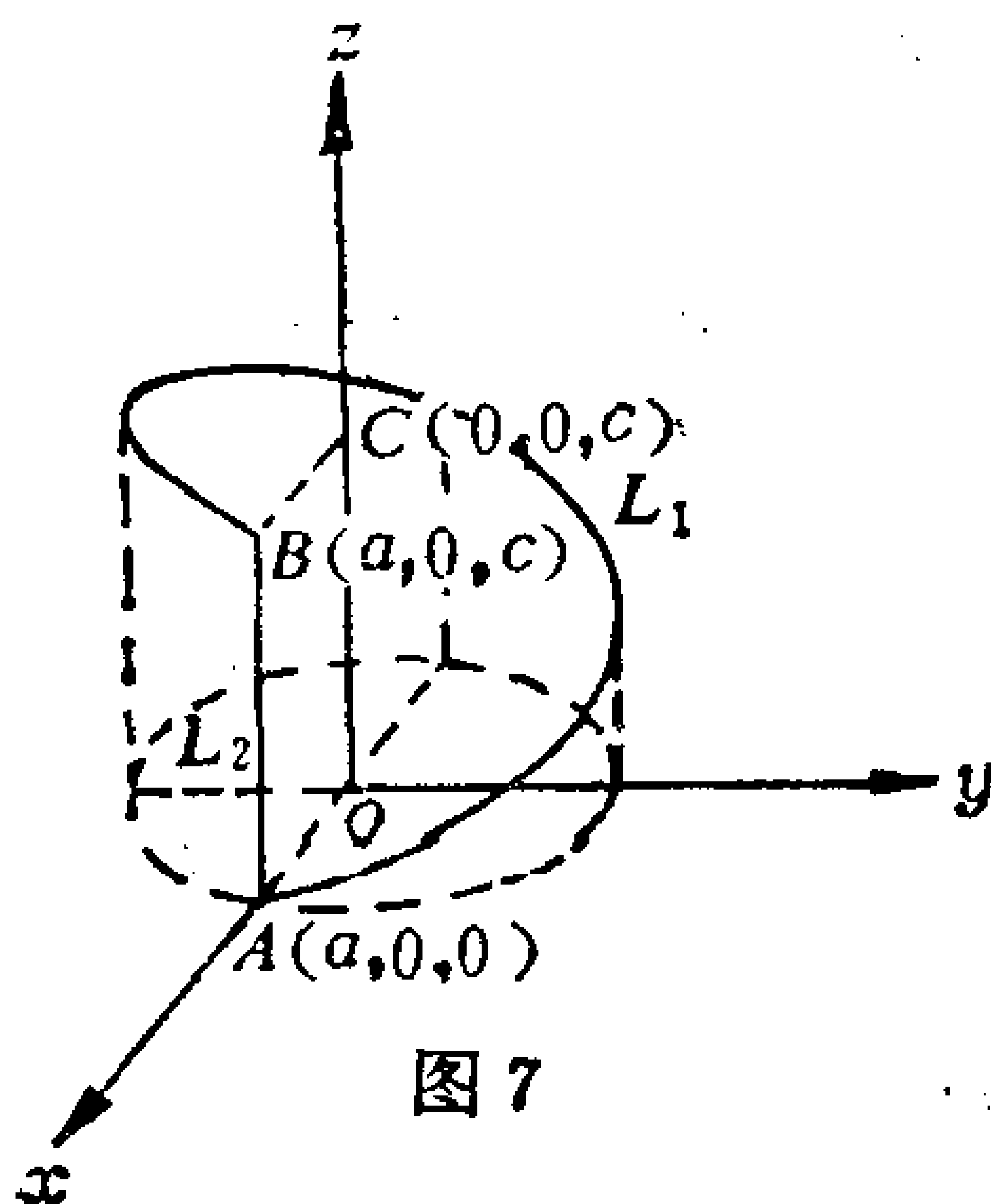


图7

$A(a,0,0)$；当 $t=2\pi$ 时，$x=a$，$y=0$，$z=c$，即对应的点是 $B(a,0,c)$。又在 L_1 上时 $\vec{ds}=\left\{-a\sin t,\ a\cos t,\frac{c}{2\pi}\right\}dt$ 故得积分

$$I=\int_{(L)}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_{L_1}(x^2+5y+3yz)dx+(5x+3xz-2)dy+(3xy-4z)dz$$

$$=-2c^2$$

(ii) 积分曲线由 A 沿直线 L_2 到 B 点。L_2 的参数方程为

$$x=a,\ y=0,\ z=t.$$

$t=0$ 对应于 A 点，$t=2c$ 对应于B点，又在 L_2 上，$dx=0$，$dy=0$，$dz=dt$。

$$\therefore\quad I=\int_{L_2}\vec{F}\cdot\vec{ds}=\int_{L_2}(x^2+5y+3yz)dx+(5x+3xz-2)dy+(3xy-4z)dz$$

$$=\int_0^c-4tdt=-2c^2.$$

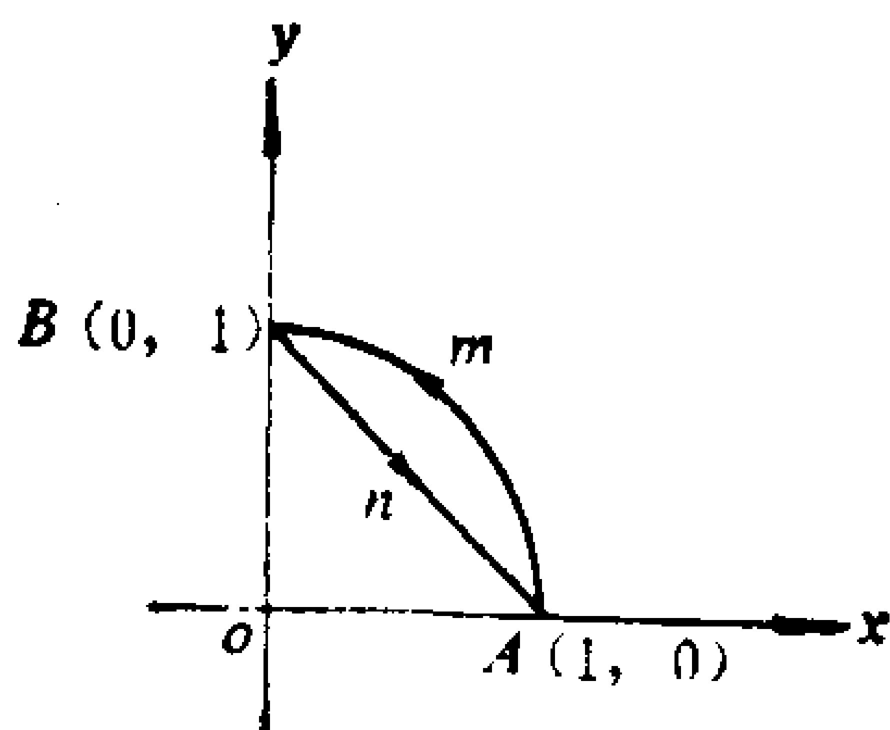


图 8

例 4 计算积分

$$\oint_{\widehat{AmBnA}} x^2dx+xydy$$

其中 $\widehat{AmB}$ 是从点 $A(1,0)$ 沿圆周 $x=\cos t$，$y=\sin t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 到点 $B(0,1)$，$\widehat{BnA}$ 是从点 $B(0,1)$ 沿直线到点 $A(1,0)$。

解 $\oint_{\widehat{AmBnA}} x^2dx+xydy$

$$= \int_{\widehat{AmB}} x^2dx+xydy+\int_{\widehat{BnA}} x^2dx+xydy$$

先求积分

$$\int_{\widehat{AmB}} x^2dx+xydy$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t\sin t+\cos^2 t\sin t)dt$$

$$= 0$$

再求积分

$$\int_{\widehat{BnA}} x^2dx+xydy \tag{1}$$

由于直线方程为 $x+y=1$，此时参数方程可写为：

$$\begin{cases} x=1-y \\ y=y \end{cases} \tag{2}$$

按积分路线方向 y 是由 1 下降到 0，将（2）式代入（1）式得到

$$\int_{\widehat{BnA}} x^2dx+xydy = \int_1^0 (1-y)^2(-dy)+(1-y)ydy$$

$$= \frac{1}{6}.$$

$$\therefore \quad \oint_{\widehat{AmBnA}} x^2dx+xydy = \frac{1}{6}.$$

§2 曲面积分

曲面积分是要计算空间曲面上分布着的量，它的概念、性质、计算方法和曲线积分有很多类似的地方。读者在学习中可以加以对比来深刻理解两类曲面积分的区别。

1. 第一类曲面积分的定义和计算。

定义 设函数 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 (S) 上有界，把 (S) 任意分成 n 块小曲面 ΔS_i（ΔS_i 同时表示第 i 块小曲面的面积），令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i\text{的直径}\}$，在 ΔS_i 上任意取定一点 (ξ_i,η_i,ρ_i)，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\rho_i)\Delta S_i$$

存在，并且与曲面 (S) 的分法和点 (ξ_i,η_i,ρ_i) 的取法无关，便称此极限值为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 (S) 上对面积的曲面积分，或称第一类曲面积分。

第一类曲面积分可以化为二重积分计算：

设在直角坐标系 $o\text{—}xyz$ 的空间中，有一光滑的用参数表示的曲面 (S)：

$$x=x(u,v),\quad y=y(u,v),\quad z=z(u,v),\quad (u,v)\in\Sigma$$

这里 Σ 为 uv 平面上的一个区域，则

$$\iint\limits_{(S)}f(x,y,z)dS$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,dudv$$

其中 $$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

例 1 计算积分

$$\iint_{(S)} z^2 dS$$

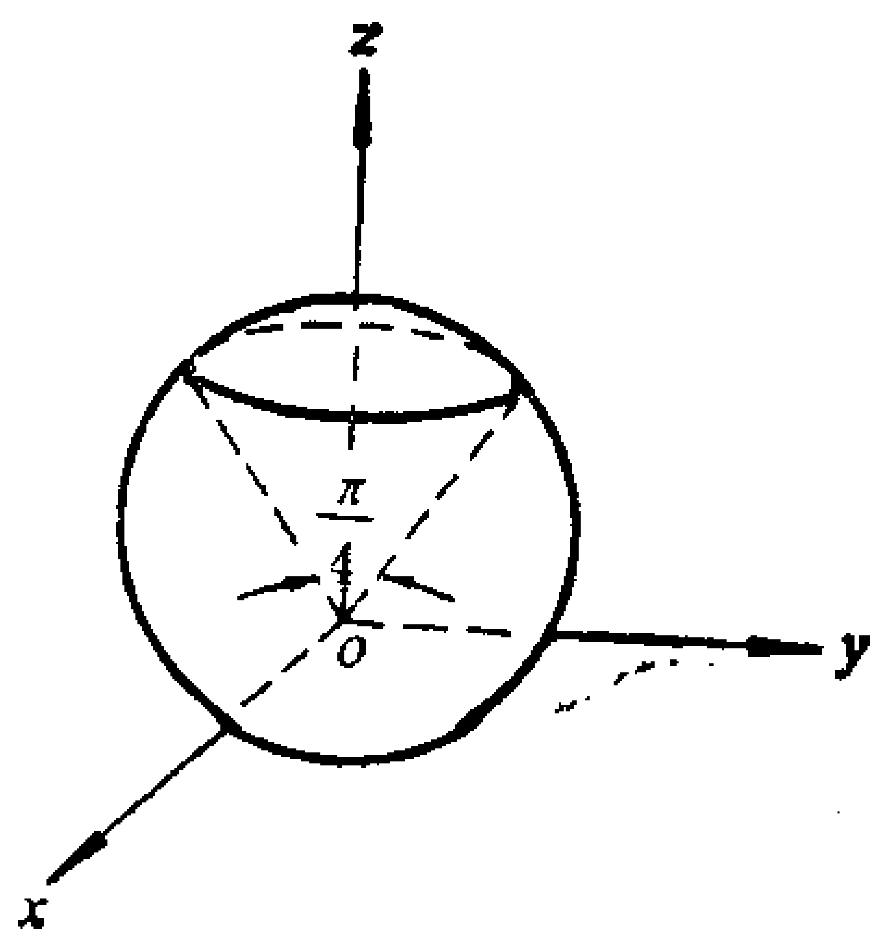


图 9

其中 (S) 为 $z^2 = x^2 + y^2$ 位于球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 内且在 xy 面上方的那一块. 曲面 (S) 的方程为:

$$\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

$$0 \leqslant \rho \leqslant R$$

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

$$x = \rho \sin\frac{\pi}{4}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta$$

$$y = \rho \sin\frac{\pi}{4}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta \qquad (\rho,\theta) \in D = \begin{cases} 0 \leqslant \rho \\ 0 \leqslant \theta \end{cases}$$

$$z = \rho\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho$$

这时

$$x_\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta, \quad y_\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \quad z_\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\sin\theta, \quad y_\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\cos\theta, \quad z_\theta = 0$$

于是得到

$$E = 1, \ F = 0, \ G = \frac{1}{2}\rho^2$$

$$\sqrt{EG-F^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\rho$$

所以

$$\iint_{(S)} z^2 dS=\frac{\sqrt{2}}{4}\iint_D \rho^3 d\rho d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi R^4.$$

例2 计算积分

$$I=\iint_{(S)}(x^2+y^2+z^2)dS$$

式中 (S) 为八面体 $|x|+|y|+|z|=a$ 的表面。

解 由对称性可知

$$I=8\iint_{(S_1)}(x^2+y^2+z^2)ds$$

其中 (S_1) 是 (S) 在第一卦限内的部分，即

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0,\ x+y+z=a.$$

由 $x+y+z=a$ 得

$$dS_1=\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy=\sqrt{3}\,dxdy$$

$$\therefore\quad I=8\iint_{(S_1)}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{3}\cdot dxdy$$

$$=8\sqrt{3}\iint_{\substack{x\geqslant 0,\,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}}[x^2+y^2+(a-x-y)^2]dxdy$$

$$=8\sqrt{3}\int_0^a dx\int_0^{a-x}2(x^2+y^2+a^2+xy-ax-ay)dy$$

$$=2\sqrt{3}a^4.$$

例 3 求积分

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}\,dS$$

其中（S）是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由 $x=R\sin\varphi\cos\theta, y=R\sin\varphi\sin\theta, z=R\cos\varphi$。求得

$$dS=R^2\sin\varphi d\varphi d\theta。$$

由此得

$$\iint_{(S)} \sqrt{x^2+y^2}\,dS=R^2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi d\varphi=\pi^2R^3。$$

例 4 求积分

$$\iint_{(S)} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中（S）是半径为 R，高为 h 的直圆柱面。

解 这积分与坐标原点的位置有关系，如果取底的中心为坐标原点，柱面的轴当作 z 轴。柱面参数方程表示为

$$x=R\cos\theta,\ y=R\sin\theta,\ z=z。$$

求得

$$dS=Rdzd\theta$$

于是

$$\iint_{(S)} \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint_{\substack{x^2+y^2=R^2\\ 0\leqslant z\leqslant h}} \frac{Rdzd\theta}{(R^2+z^2)^{3/2}}$$

$$=R\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^h \frac{dz}{(R^2+z^2)^{3/2}}=2\pi R\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{\sqrt{R^2+h^2}}\right)$$

2．第二类曲面积分的定义和计算：

给定曲面（S），这类曲面积分要求曲面是双侧的，而且

要先确定它的一个侧，设 (S) 是由方程

$$z=z(x,y)$$

表示的无重点的光滑曲面，它在 xy 平面上的投影为边界由逐段光滑曲线 L 所围成的区域 σ_{xy}。

将曲面 (S) 用任何方法分为 n 小块 $S_i(i=1,2,\cdots,n)$ 设 G_i 为 S_i 在 xy 平面上的投影，从而得到区域 σ_{xy} 的一个相应分割，如果曲面 S 取的是上侧，这时所有 G_i 的面积算作正的，否则算作负的。设有界函数 $f(x,y,z)$ 定义在 S 上，在每一小块 S_i 内任取一点 $P_i(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$，作和式

$$\sigma=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)D_i$$

其中 D_i 表示 G_i 的面积，D_i 是带有符号的。设 d_i 为 S_i 的直径，记 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$，若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)D_i$$

存在为 I，且 I 与曲面分割的方法无关，也与点 P_i 的选择无关，则称 I 为 $f(x,y,z)$ 沿曲面 (S) 所选一侧的第二类曲面积分，记作

$$I=\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy$$

若将 S_i 投影到 yz 平面上或 zx 平面上，可得到类似的两个第二类曲面积分：

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dydz \quad 或 \quad \iint_{(S)} f(x,y,z)dzdx.$$

注：论述第二类曲面积分时，如果涉及到曲面上闭曲线

的曲线积分，这曲线的走向要和曲面的侧相配合，例如曲面由 $z=f(x,y)$ 给出，并且选定了用它的上侧，那么曲线的走向要取反时针方向，此时取投影面积为正。

从两种曲面积分的定义可以看出，第一类曲面积分是由小块曲面上一点的函数值与小块面积的乘积求和再求极限，而第二类曲面积分是由小块曲面上一点的函数值与带有方向的小块面积在坐标平面上投影的乘积求和再求极限；从性质上讲，当曲面的方向改变时，第一类曲面积分的值不变，而对第二类曲面积分要改变符号。这就是两类曲面积分的区别。它们之间由下面的等式联系着：

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)dxdy=\iint_{(S)} f(x,y,z)\cos r ds$$

不论 (S) 取的是哪一侧，这等式一概成立，这是因为 (S) 由上侧变为下侧时公式左端的积分值改变符号，同时 r 也要由锐角变为钝角，$\cos r$ 也改变符号，因此右端的积分也改变符号。

现在讨论第二类曲面积分的计算：

例 1 计算积分

$$\iint_{(S)} xyzdxdy$$

其中 (S) 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一、八卦限的部分，取球面外侧。

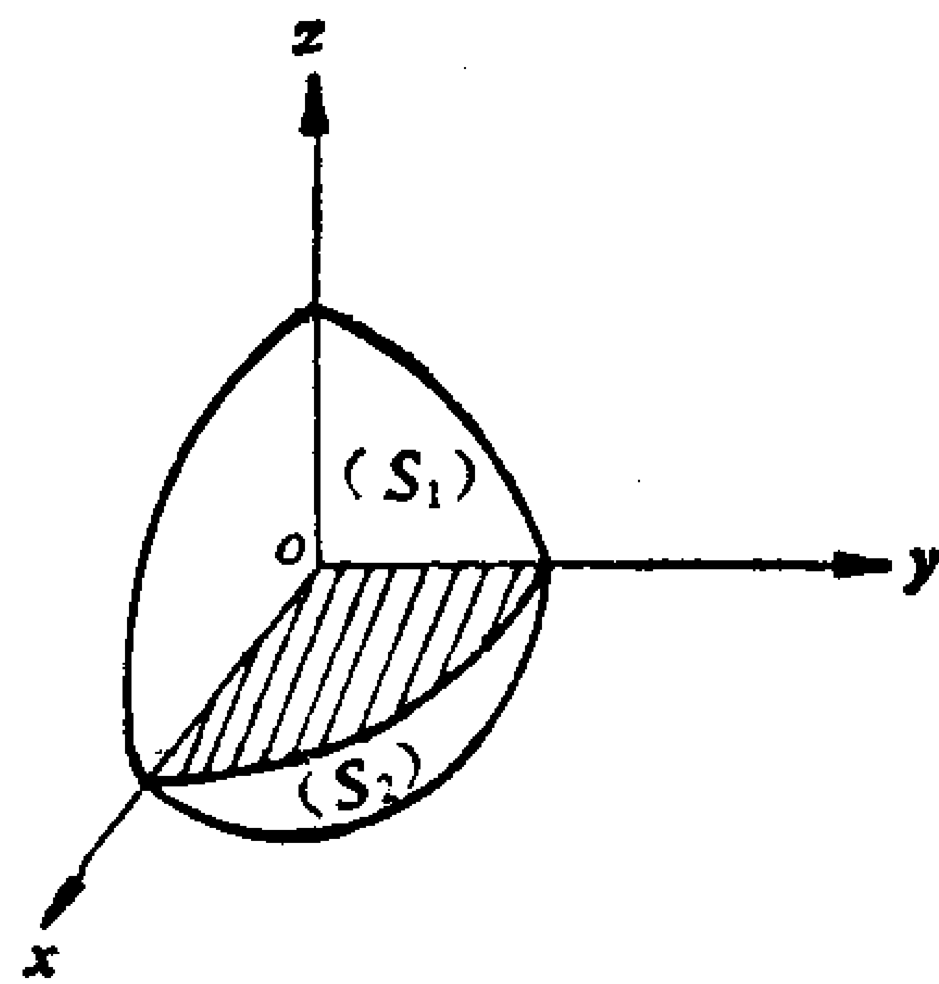


图 10

解 设 $(S)=(S_1)\cup(S_2)$，曲面在第一、八卦限部分的方程分别为：

(S_1)：$z_1=\sqrt{1-x^2-y^2}$

(S_2)：$z_2=-\sqrt{1-x^2-y^2}$

它们在 xy 平面上的投影区域 D_{xy} 都是单位圆。在第一象限的部分，依题意积分是沿 (S_1) 的上侧和 (S_2) 的下侧进行，所以

$$\iint\limits_{(S)} xyzdxdy=\iint\limits_{(S_1)} xyzdxdy+\iint\limits_{(S_2)} xyzdxdy$$

$$=\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy-$$

$$-\iint\limits_{D_{xy}} -xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_{xy}} xy\sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^1 r^3\cos\theta\sin\theta\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$=\frac{2}{15}.$$

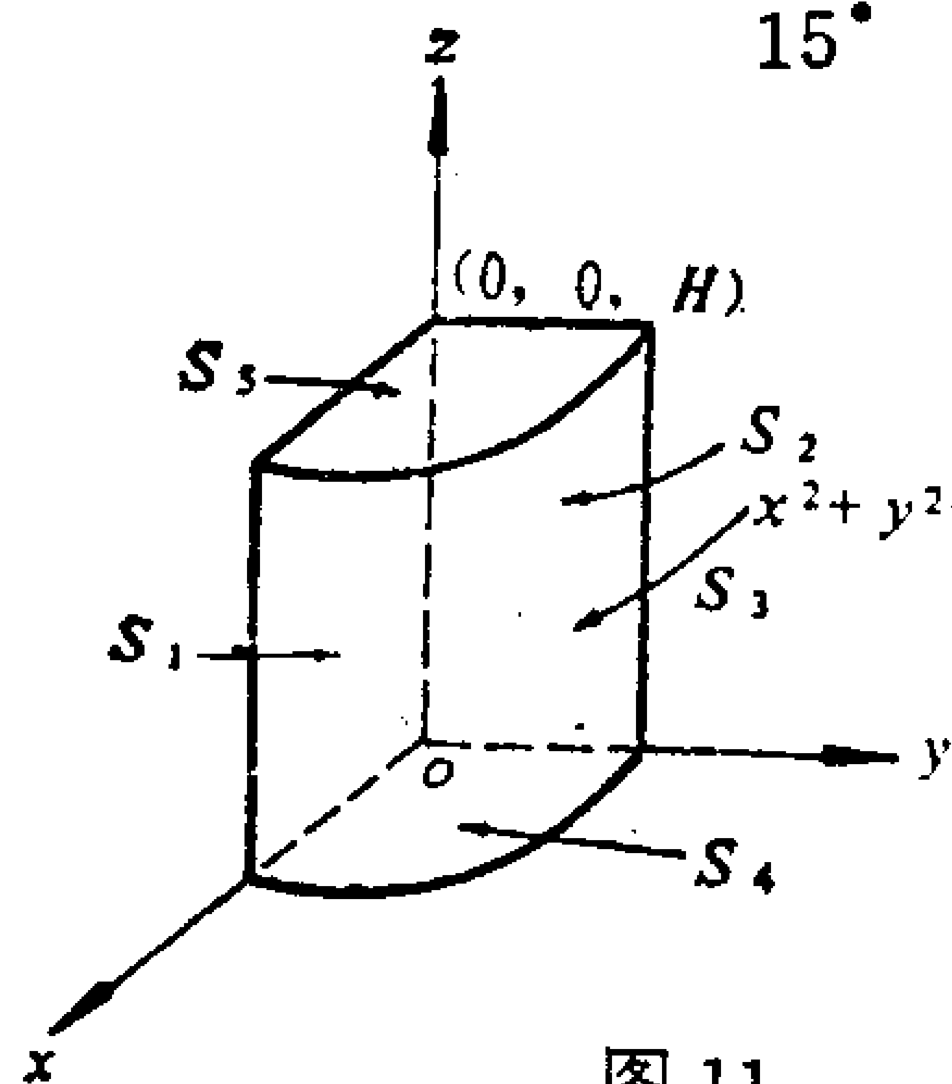


图 11

例 2 计算积分

$$\oiint\limits_{(S)} zxdydz+xydzdx+yzdxdy$$

其中 (S) （图 11）是 $\frac{1}{4}$ 圆柱体的外侧。

解 先求 $I_1=\oiint\limits_{(S)} yzdxdy$

将 (S) 分为五块：$(S_1)\cup(S_2)\cup(S_3)\cup(S_4)\cup(S_5)$

其中$(S_1)(S_2)$和(S_3)与xy一平面垂直，因此在这三部分上积分为零。在S_4上由于$z=0$而积分也是零。

$$\therefore\quad I_1=\iint_{S_5} yz\,dxdy = H\iint_{\substack{x^2+y^2\leqslant R^2\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0}} y\,dxdy$$

$$=H\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\int_0^R \sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{HR^3}{3}$$

$$I_2=\oint\!\!\!\!\oint_{(S)} zx\,dydz=\iint_{\substack{0\leqslant y\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant H}} z\sqrt{R^2-y^2}\,dydz$$

$$=\int_0^H z\,dz\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\,dy$$

$$=\frac{\pi R^2H^2}{8}$$

$$I_3=\oint\!\!\!\!\oint_{(S)} xy\,dzdx=\iint_{\substack{0\leqslant x\leqslant R\\ 0\leqslant z\leqslant H}} x\sqrt{R^2-x^2}\,dzdx=\frac{HR^3}{3}$$

$$\therefore\quad \oint\!\!\!\!\oint_{S} yz\,dxdy+zx\,dydz+xy\,dzdx$$

$$=\frac{2\pi R^3}{3}+\frac{\pi R^2H^2}{8}$$

例 3 计算积分

$$I=\iint_{(S)}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

其中 (S) 为半球：$x^2+y^2+z^2=2Rx(z>0)$被柱面$x^2++y^2=2rx$

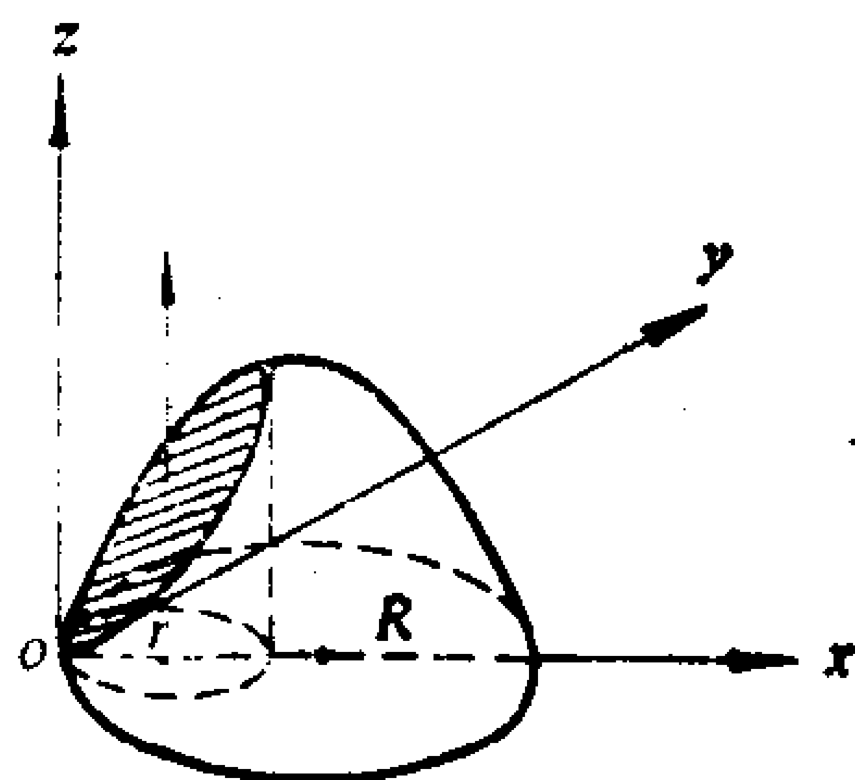


图 12

$(R>r>0)$ 截下的部分。（图12）

解 截面的法线方向系数为：

$$x-R,\ y,\ z.$$

方向余弦为：

$$\left(\frac{x-R}{\pm\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}},\ \frac{y}{\pm\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}},\right.$$

$$\left.\frac{z}{\pm\sqrt{(x-R)^2+y^2+z^2}}\right)=\left(\frac{x-R}{\pm R},\ \frac{y}{\pm R},\ \frac{z}{\pm R}\right)$$

因为 $\cos\gamma>0$，而 $z>0$，所以上式中的 R 取正号。

$$\therefore\quad \cos\alpha=\frac{x-R}{R},\quad \cos\beta=\frac{y}{R},\quad \cos\gamma=\frac{z}{R}.$$

根据两类曲面积分的关系公式

$$\iint_{(S)}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$$

$$=\iint_{(S)}\left[(y-z)\ \frac{x-R}{R}+(z-x)\ \frac{y}{R}+(x-y)\ \frac{z}{R}\right]dS$$

$$=\iint_{(S)}(z-y)dS$$

积分曲面关于 $y=0$ 对称，所以

$$\iint_{(S)}yds=0$$

$$\iint_{(S)}zdS=\iint_{(S)_{上侧}}\frac{z}{\cos\gamma}dxdy=R\iint_{(S)_{上侧}}dxdy$$

$$=R\iint_{D_{xy}}dxdy=R\cdot\pi r^2.$$

$$\therefore\quad I=R\pi r^2.$$

例 4 计算积分

$$I=\iint\limits_{(S)} x^3 dydz$$

其中 (S) 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部，选定外侧。

解 把曲面 (S) 表示为参数方程：

$x=a\sin\varphi\cos\theta$，$y=b\sin\varphi\sin\theta$，$z=c\cos\varphi$。

$$\left(0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\right)$$

于是有：

$$I=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}} a^3\sin^3\varphi\cos^3\theta\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}d\varphi d\theta.$$

其中 $\frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)}=\begin{vmatrix} b\cos\varphi\sin\theta & b\sin\varphi\cos\theta \\ -c\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}=bc\sin^2\varphi\cos\theta$

由于积分在 (S) 的外侧

$$I=\iint\limits_{D_{\varphi\theta}} a^2\sin^3\varphi\cos^3\theta\, bc\sin^2\varphi\cos\theta\, d\varphi d\theta$$

$$=a^3bc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^5\varphi d\varphi\int_0^{2\pi}\cos^4\theta d\theta$$

$$=\frac{2}{5}\pi a^3bc$$

§3 积分在物理中的应用

曲面和曲线积分在物理中应用很广，我们只举几个典型例子。

例 1 求一质点沿 xy 平面内的椭圆（c）运动一周所作的功，设椭圆方程为：$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$，力场为：

$$\vec{F}=(3x-4y+2z)\vec{i}+(4x+2y-3z^2)\vec{j}+$$
$$+(2xz-4y^2+z^3)\vec{k}$$

解 在平面 $z=0$，$\vec{F}=(3x-4y)\vec{i}+(4x+2y)\vec{j}-4y^2\vec{k}$，$d\vec{r}=dx\vec{i}+dy\vec{j}$，因而所作功是：

$$\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r}=\oint_c[(3x-4y)\vec{i}+(4x+2y)\vec{j}-4y^2\vec{k}]\cdot$$
$$(dx\vec{i}+dy\vec{j})$$
$$=\oint_c(3x-4y)dx+(4x+2y)dy$$

椭圆的参数方程为：

$$x=4\cos t,\ y=3\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

于是积分等于

$$\int_0^{2\pi}[3(4\cos t)-4(3\sin t)][-4\sin t]dt+$$
$$+[4(4\cos t)+2(3\sin t)][3\cos t]dt$$
$$=(48t-15\sin^2 t)\Big|_0^{2\pi}=96\pi$$

例 2 求向量 $\vec{a}=y\vec{i}+z\vec{j}+x\vec{k}$ 穿过由平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$，$x+y+z=a$（$a>0$）所包围角锥的全表面的流量。

解 将角锥的四个面依次表示为 S_1,S_2,S_3,S_4，由它们所围成的四面体的表面为 S，并取 S 的外侧为正侧，则流量

为

$$Q=\oint\!\!\!\oint_S ydydz+zdxdz+xdxdy$$

在 S 的方程和被积式里，把 x，y，z 轮换一周，总结果都不改变，由此知道

$$Q=3\oint\!\!\!\oint_S xdxdy$$

$$=3\left[\iint_{S_1} xdxdy+\iint_{S_2} xdxdy+\iint_{S_3} xdxdy+\right.$$

$$\left.+\iint_{S_4} xdxdy\right] \qquad (1)$$

由于 S_1 和 S_2 在 xy 平面的投影域的面积为 0，故

$$\iint_{S_1} xdxdy=\iint_{S_2} xdxdy=0.$$

又因为

$$\iint_{S_3} xdxdy=-\iint_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}} xdxdy$$

$$\iint_{S_4} xdxdy=\iint_{\substack{x\geqslant 0,y\geqslant 0\\ x+y\leqslant a}} xdxdy$$

将所得结果代入（1）式得 $Q=0$。

例 3　试求螺旋线 L：$x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=ht$ 对应于 $0\leqslant t\leqslant m$ 的一段弧的重心。

解　$M=\int dS=\int_0^m\sqrt{a^2+h^2}dt=m\sqrt{a^2+h^2}$.

而 $\int_L xdS = \int_0^m a\cos t\sqrt{a^2+h^2}\,dt = a\sqrt{a^2+h^2}\sin m$

$$\int_L ydS = \int_0^m a\sin t\sqrt{a^2+h^2}\,dt = a\sqrt{a^2+h^2}(1-\cos m)$$

$$\int_L zdS = \int_0^m ht\sqrt{a^2+h^2}\,dt = h\sqrt{a^2+h^2}\,\frac{m^2}{2}$$

∴ 重心坐标：$\overline{x} = \frac{a}{m}\sin m$，$\overline{y} = \frac{a}{m}(1-\cos m)$，$\overline{z} = \frac{hm}{2}$.

第十六章　各类积分间的联系和场论初步

在三维空间中各类积分牵涉到区域与其边界的公式有格林公式、高斯公式和斯托克斯公式，这些公式不仅有明确的物理意义，实际上又是高维空间里的微积分基本定理，它们刻划了在高维空间中微分与积分的关系，其中详细的讨论还要进一步的知识，现在不能多谈。本章只要求读者切实掌握三个公式，并能熟练地用它们解决一些积分的计算问题。

§1　各类积分间的联系

1. 格林公式

设 D 是以光滑曲线 l 为边界的平面单连通区域，函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 及 l 上连续并具有对 x 和 y 的连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_l Pdx+Qdy \qquad (1)$$

积分路径 l 的方向规定为人沿着曲线 l 行走时 D 恒在它的左边。

格林公式的应用：

(i) 格林公式指出了在平面区域 D 上的二重积分与沿着 D 的边界 l 上的曲线积分之间的关系，根据这个关系，有

时可用二重积分来计算曲线积分；有时也用曲线积分来计算二重积分。

(ii) 在物理、力学中往往要问在什么条件下场力所作的功与路线无关，在数学上这就是问曲线积分与积分路径无关的条件。

例1 将格林公式变成

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\oint_l Pdy-Qdx$$

的形状，或

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\oint_l[P\cos(x,\vec{n})+Q\sin(x,\vec{n})]ds$$

的形状（其中$\vec{n}$表示朝外的法线方向）

证 在格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_l Pdx+Qdy$$

中以P代Q，以$-Q$代P得

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy=\oint_l Pdy-Qdx$$

$$=\oint_l[P\cos(x,\vec{n})+Q\cos(y,\vec{n})]ds$$

$$=\oint_l[P\cos(x,\vec{n})+Q\sin(x,\vec{n})]ds$$

上式是因为$dy=\cos(x,\vec{n})ds$

$$-dx=\cos(\overrightarrow{y,n})ds.$$

例 2 利用格林公式计算曲线积分.

$$I=\oint_l \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$$

式中 l 为区域 D：$0<x<\pi$，$0<y<\sin x$ 的正方向的围线.（图 1）

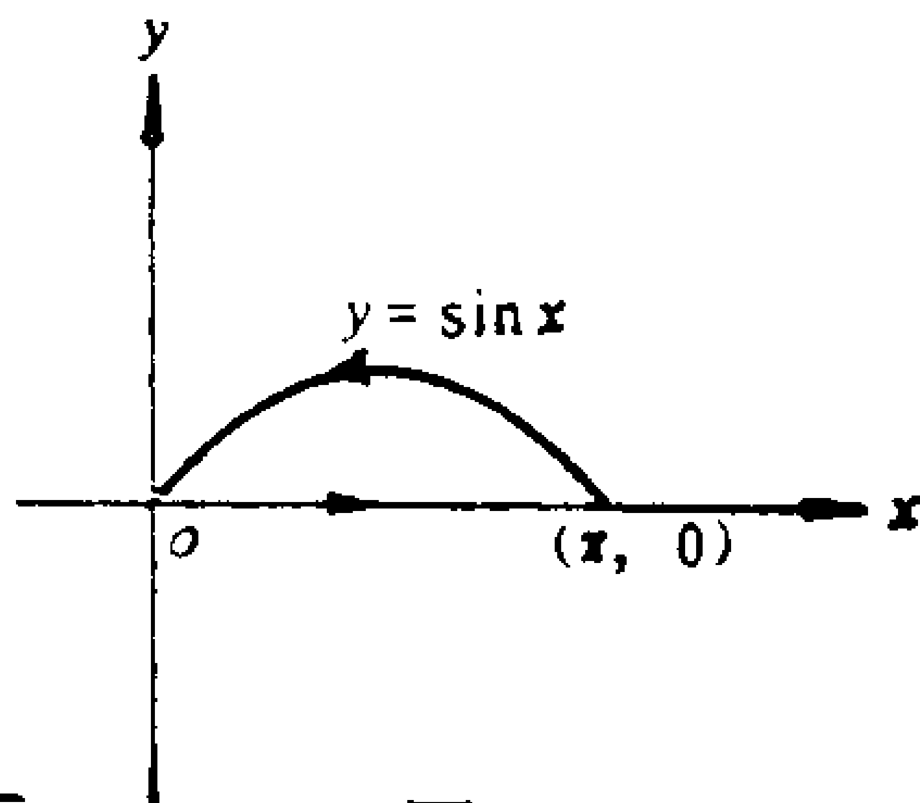


图 1

解 $P=\sqrt{x^2+y^2}$

$Q=y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=y^2+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

利用格林公式得

$$I=\iint\limits_{\substack{0<x<\pi\\0<y<\sin x}} y^2dxdy=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}y^2dy=-\frac{4}{9}.$$

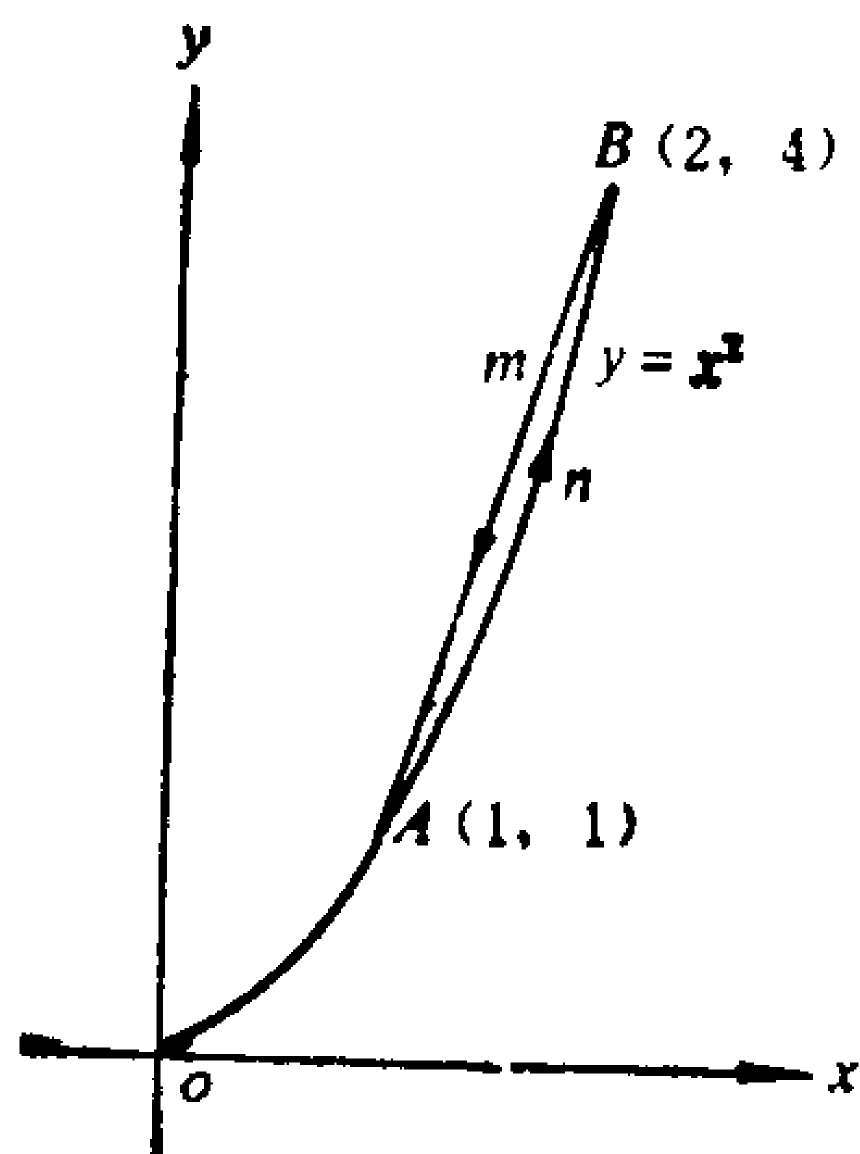


图 2

例 3 计算积分

$$I=\oint_l e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xydx+\sin 2xydy)$$

其中 l：$\overset{\frown}{AnB}$ 是抛物线，$\overset{\frown}{BmA}$ 是连接点 $B(2,4)$ 和点 $A(1,1)$ 的直线.（图 2）

解 $P=e^{-(x^2-y^2)}\cos 2xy$

$Q=e^{-(x^2-y^2)}\sin 2xy$

$$\therefore\quad \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$$

应用格林公式，由于二重积分的被积函数为零，故积分值为零，即

$$\oint_l e^{-(x^2-y^2)}(\cos 2xy dx + \sin 2xy\, dy) = 0$$

本题可以直接计算曲线积分用以进行验算。

例 4 计算二重积分

$$\iint_D e^{-y^2} dx dy$$

区域 D 是以 $o(0,0)$，$A(1,1)$，$B(0,1)$ 为顶点的三角形区域。（图 3）

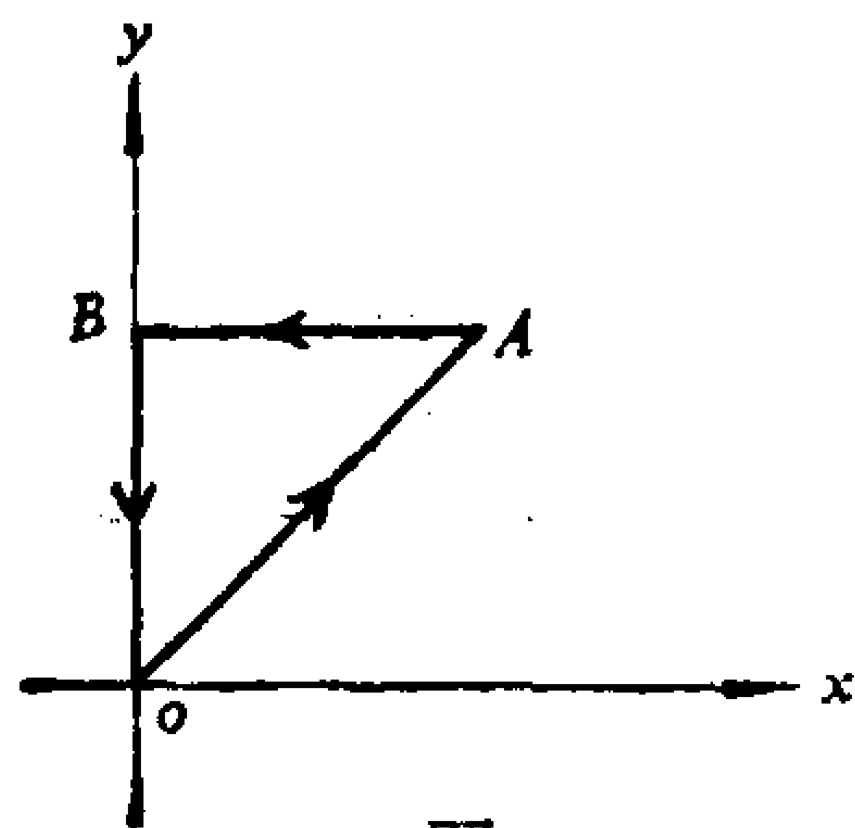


图 3

解 应用格林公式，这时

$$P = 0,\ Q = xe^{-y^2}$$

有

$$\iint_D e^{-y^2} dxdy = \oint_l xe^{-y^2} dy$$

$$= \int_{\overrightarrow{OA}} xe^{-y^2} dy + \int_{\overrightarrow{AB}} xe^{-y^2} dy + \int_{\overrightarrow{BO}} xe^{-y^2} dy$$

$$= \int_0^1 ye^{-y^2} dy$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

例 5 计算积分

$$I = \oint_l \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

1） l 依正向在圆周 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 上进行。

2） l 依正向在圆周 $x^2+y^2=1$ 上进行。

解 1） l 不包含坐标原点。

$$P=-\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad Q=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

由于曲线 l 不包含坐标原点，因此在 l 上和 l 内：

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

处处成立。用格林公式后得：

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

2） l 包含坐标原点

由于函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在原点不存在，故这时

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

在原点处不能成立，因此不能直接应用格林公式。我们以原点为心，充分小的数 δ $(0<\delta<1)$ 为半径作圆周 c，取 c 为顺时针方向，使由 c 和 l 组成的 $l+c$ 所围区域 D 的边界为正向，于是在区域 D 及边界 $l+c$ 上 P，Q 处处连续，且有连续偏导数，此时可应用格林公式，又因

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

故有

$$\int_{l+c}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0.$$

则得

$$I=\int_{l}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=-\int_{c}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{c^-}\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$$

其中 c^- 表示与 c 反向的圆周。

以 $x=\delta\cos t$，$y=\delta\sin t$ 且取积分下限和上限分别为 0 和 2π 得

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\delta^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}{\delta^2}dt=2\pi.$$

例 6 证明等式

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy=\int_l\frac{\partial u}{\partial n}ds$$

其中 l 是区域 D 的围线，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 是外法线方向的方向导数。

证 由格林公式

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\int_l[P\cos(x,\vec{n})+Q\sin(x,\vec{n})]ds$$

设 $P=\frac{\partial u}{\partial x}$，$Q=\frac{\partial u}{\partial y}$，于是得到

$$\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)dxdy$$

$$=\oint_l\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\vec{n})+\frac{\partial u}{\partial y}\sin(x,\vec{n})\right]ds$$

$$=\oint_l \frac{\partial u}{\partial n} ds$$

2. 高斯公式

设三维空间单连通域 V 的边界曲面 S 是光滑的，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在 V 及 S 上具有关于 x，y，z 的连续偏导数，则有

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

$$=\iint_{S_{外}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$$

$$=\iint_{S_{外}} [P\cos(x,\vec{n}) + Q\cos(y,\vec{n}) + R\cos(z,\vec{n})] ds$$

其中 $\vec{n}$ 为曲面 S 的外法线方向。

例 1 利用高斯公式求积分

$$\oiint_S y(x-z)dydz + z^2dzdx + (y^2+xz)dxdy$$

其中 S 取边长为 a 的正立方体的外侧。

解 如果直接用曲面积分进行计算，则曲面 S 由六个平面组成，即

S_1： $x=a$；　　S_4： $x=0$。

S_2： $y=a$；　　S_5： $y=0$。

S_3： $z=a$；　　S_6： $z=0$。

曲面积分应在六个平面上分别进行计算，读者可以自己完成。

如果应用格林公式，所求曲面积分等于

$$\iiint\limits_{(V)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[y(x-z)]+\frac{\partial}{\partial y}[x^2]+\frac{\partial}{\partial z}[y^2+xz]\right\}$$

$$dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{(V)}(y+x)dxdydz$$

$$=\int_0^a dz\int_0^a dy\int_0^a(y+x)dx$$

$$=a^4.$$

例 2　利用高斯公式计算积分

$$\oiint\limits_{(S)}(y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$$

其中（S）是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧。

解　$P=y-z$，$Q=z-x$，$R=x-y$ 从而

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}=0$$

因此，对于空间任一区域（V），都有

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz=0$$

应用高斯公式，当 S 为空间区域（V）的界面时，就有

$$\oiint\limits_{S}(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy=0.$$

例 3　计算积分

$$\iint\limits_{S}f(x)dydz+g(y)dxdz+h(z)dxdy$$

式中 $f(x)$，$g(y)$，$h(z)$为连续可微函数，S 为平行六面体（V）：$0<x<a$，$0<y<b$，$0<z<c$ 的外表面。

解 应用高斯公式

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{S}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

∴ 原式化为

$$\iiint\limits_{(V)}(f'(x)+g'(y)+h'(z))dxdydz$$

$$=\iiint\limits_{(V)}f'(x)dxdydz+\iiint\limits_{(V)}g'(y)dxdydz+$$

$$+\iiint\limits_{(V)}h'(z)dxdydz$$

$$=\int_0^a f'(x)dx\int_0^b dy\int_0^c dz+\int_0^a dx\int_0^b g'(y)dy\int_0^c dz+$$

$$+\int_0^a dx\int_0^b dy\int_0^c h'(z)dz$$

$$=cb[f(a)-f(0)]+ac[g(b)-g(0)]+$$

$$+ab[h(c)-h(0)]$$

$$=abc\left[\frac{f(a)-f(0)}{a}+\frac{g(b)-g(0)}{b}+\frac{h(c)-h(0)}{c}\right]$$

3. 斯托克斯公式:

若光滑曲面 S 的边界为光滑曲线 L，函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在曲面 S 及曲线 L 上具有对 x,y,z 的连续偏导数，则成立以下公式:

$$\int\limits_{l}Pdx+Qdy+Rdz=\iint\limits_{S}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos(x,\vec{n})+\right.$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos(y,\vec{n})+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$\cos(z,\vec{n})\Big]ds$$

$$=\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+$$

$$+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}\cos(x,\vec{n}) & \cos(y,\vec{n}) & \cos(z,\vec{n})\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}ds$$

$$=\iint_S\begin{vmatrix}dydz & dzdx & dxdy\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

曲线L的方向和曲面S的侧符合右手法则。

例 1 应用斯托克斯公式，计算曲线积分

$$I=\oint_l xyzdz$$

其中l为圆周 $x=\cos t$，$y=\frac{\sin t}{\sqrt{2}}$， $z=\frac{\sin t}{\sqrt{2}}$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 在 l 上t增大时动点的移动方向为正向。

解 直接计算曲线积分，得

$$I=\oint_l xyzdz=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 tdt=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

应用斯托克斯公式得：

$$I=\oint_l xyzdz=-\iint_S yz\cos\beta ds$$

其中 s 为圆周 l 所围成的区域，根据 l 的方向决定了 s 的侧为上侧，所以平面法线的方向余弦为 0，$\frac{-1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，而 $\cos\beta<0$，由于 l 在 xoy 平面上的投影 T 为：$x^2+2z^2=1$，将它所围的区域记作 D，而 $\cos\beta<0$，则

$$I=-\iint_S yz\cos\beta ds=\iint_D z^2dzdx=4\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}z^2dz$$

$$\int_0^{\sqrt{1-2z^2}}dx=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}$$

例 2 应用斯托克斯公式计算积分

$$\oint_l (2y+z)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$$

其中 l 取 $x+y+z=1$ 与坐标面交线的正向。

解 应用斯托克斯公式

$$\oint_l (2y+z)dx+(x-z)dy+(y-x)dz$$

$$=\iint_S (1+1)dydz+(1+1)dzdx+(1-2)dxdy$$

$$=\iint_S 2dydz+2dzdx-dxdy=\frac{3}{2}.$$

§2 曲线积分和路径的无关性

l 为平面上从点 A 到点 B 的曲线，c 为平面上的封闭曲

线，所围区域为 D，设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 D 内有一阶连续偏导数，关于曲线积分 $\int_c P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ 在什么条件下与路径无关，而只与曲线的端点有关的问题有四个等价命题：

(1) 对任一全部含在 D 内的闭曲线 l

$$\oint_l Pdx+Qdy=0$$

(2) 对任一全部含在 D 内的曲线 l，曲线积分

$$\int_l Pdx+Qdy$$

与路径无关（只依赖曲线的端点）.

(3) 微分式 $Pdx+Qdy$ 在 D 内是某一个函数 $U(x,y)$ 的全微分，即 $dU=Pdx+Qdy$

(4) $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ 在 D 内处处成立。

对于上述四个命题，要求读者能够证明并能灵活应用它们。

例 1 试证：若 c 为封闭曲线，$\vec{l}$ 为某个固定的方向，则

$$\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})ds=0$$

式中 $\vec{n}$ 为曲线 c 的外法线。

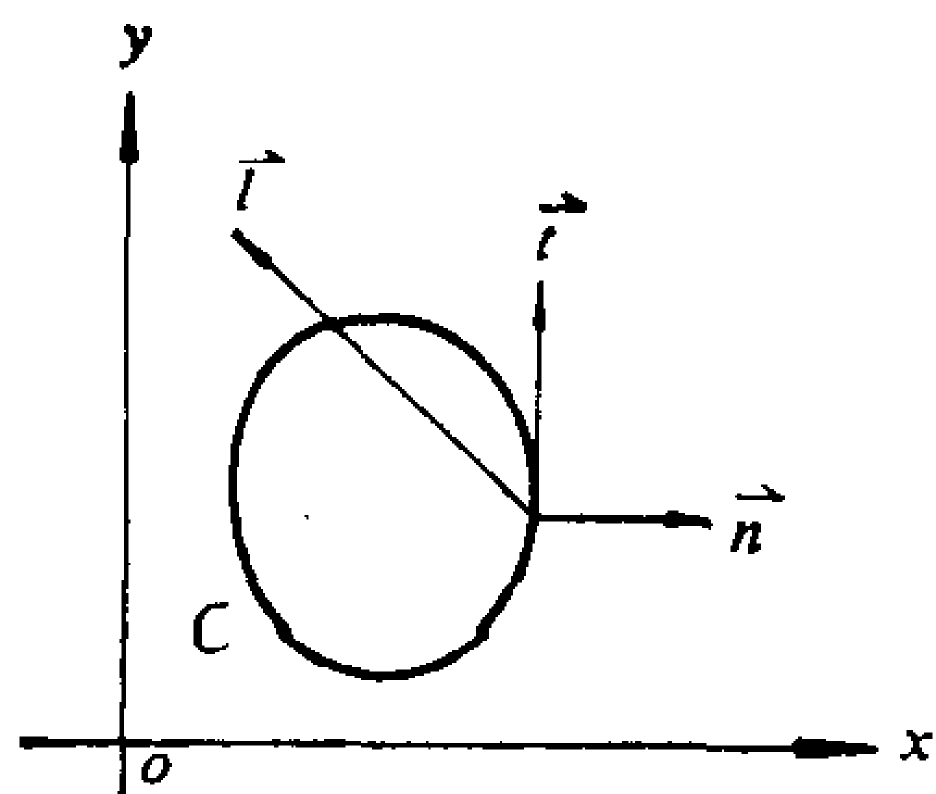


图 4

证法 1

$$\cos(\vec{l},\vec{n})=\frac{\vec{l}\cdot\vec{n}}{|\vec{l}||\vec{n}|}=\vec{l}_0\cdot\vec{n}_0$$

$\vec{l}_0$，$\vec{n}$ 分别是 $\vec{l},\vec{n}$ 的单位向量，且 $\vec{l}_0,\vec{n}_0$ 的坐标分别为：

$$((\cos(x,\vec{l}_0),\ \cos(y,\vec{l}_0)),(\cos(x,\vec{n}_0),\cos(y,\vec{n}_0))$$

于是

$$\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})\,ds = \oint_c [\cos(x,\vec{l}_0)\cos(x,\vec{n}_0) +$$

$$+\cos(y,\vec{l}_0)\cos(y,\vec{n}_0)]ds$$

$$= \oint_c \cos(y,\vec{l}_0)\cos(y,\vec{n}_0) - (-\cos(x,\vec{l}_0)\cos(x,\vec{n}_0)]ds \qquad (A)$$

由公式

$$\oint_c Pdx + Qdy = -\oint_c [P\cos(y,\vec{n}) - Q\cos(x,\vec{n})]ds$$

上式是因为 $dy=\cos(x,\vec{n})ds$，$-dx=\cos(y,\vec{n})\,ds$

化简（A）式得

$$\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})ds = -\oint_c \cos(y,\vec{l}_0)dx + (-\cos(x,\vec{l}_0)\,dy$$

上式右端的被积函数 $-\cos(y,\vec{l}_0)$ 与 $\cos(x,\vec{l}_0)$ 都是常数，把它们分别当作格林公式中的被积函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$，变成二重积分，便得到

$$\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})ds$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial\cos(x,\vec{l}_0)}{\partial x} - \left(-\frac{\partial\cos(y,\vec{l}_0)}{\partial y}\right)\right]dxdy$$

$$=0.$$

证法 2 把$\vec{l}$的方向取为x轴的方向，于是

$$\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})ds = \oint_c \cos(x,\vec{n})ds$$

因为$\cos(x,\vec{n}) = \cos(y,\vec{t})$，其中$\vec{t}$是$c$在$(x,y)$点的切线方向，$\cos(x,\vec{n})ds = \cos(y,\vec{t})ds = dy$

$\therefore$ 上式$=\oint_c dy$，应用格林公式

$$\oint_c dy = 0$$

即 $\oint_c \cos(\vec{l},\vec{n})ds = 0$

例 2 A，B，C是满足$AC - B^2 > 0$的常数，验证

$$Pdx + Qdy = \frac{1}{2}\frac{xdy - ydx}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2},$$

适合条件

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

并求出关于奇点（0,0）的循环常数。

验证 $P = -\frac{1}{2}\frac{y}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2},$

$$Q = \frac{1}{2}\frac{x}{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{Ax^2 - Cy^2}{2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{Ax^2 - Cy^2}{2(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)^2}$$

定义 只环绕奇点 M 一周的闭路上的积分值叫做区域 D 的循环常数，记作 w，于是，对于 D 内任一闭路 c

$$\oint_c Pdx+Qdy=nw$$

其中 n 为沿闭路 c 按递时针方向绕奇点 M 的圈数。

$$w=\frac{1}{2}\oint_{x^2+y^2=1}\frac{xdy-ydx}{Ax^2+2Bxy+Cy^2}$$

设 $x=\cos t$，$y=\sin t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，

$$w=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(\cos^2 t+\sin^2 t)dt}{A\cos^2 t+2B\sin t\cos t+C\sin^2 t}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{d(\operatorname{tg} t)}{A+2B\operatorname{tg} t+C\operatorname{tg}^2 t}$$

$$=\frac{1}{2C}\int_0^{2\pi}\frac{d\operatorname{tg} t}{\left(\operatorname{tg} t+\frac{B}{C}\right)^2-\left(\frac{B}{C}\right)^2+\frac{AC}{C^2}}$$

$$=\frac{1}{2C}\int_0^{2\pi}\frac{d\left(\operatorname{tg} t+\frac{B}{C}\right)}{\left(\operatorname{tg} t+\frac{B}{C}\right)^2+\frac{AC-B^2}{C^2}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{AC-B^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{C\operatorname{tg} t+B}{\sqrt{AC-B^2}}\bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\frac{(\operatorname{tg} t+B)}{\sqrt{AC-B^2}}\bigg|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\right]=\frac{\pi}{\sqrt{AC-B^2}}$$

例 3 设有积分

$$L=\int_A^B\left(\frac{x}{y}r^\lambda dx-\frac{x^2}{y^2}r^\lambda dy\right)$$

试求指数 λ 使得积分与路径无关，并求积分值 L。其中

$r^2 = x^2 + y^2$。

解 因为$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{y}r^\lambda\right) = \dfrac{xr^{\lambda-2}(\lambda y^2 - r^2)}{y^2}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^2}{y^2}r^\lambda\right) = -\frac{xr^{\lambda-2}(2r^2+\lambda x^2)}{y^2}$$

当 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$时，

$$\frac{xr^{\lambda-2}(\lambda y^2 - r^2)}{y^2} = -\frac{xr^{\lambda-2}(2r^2+\lambda x^2)}{y^2}$$

于是 $\lambda y^2 - r^2 = -2r^2 - \lambda x^2$，$\lambda(x^2+y^2) = -r^2$，所以 $\lambda = -1$。

$$L = \int_A^B \frac{x}{yr}\,dx - \frac{x^2}{y^2 r}dy$$

与积分路径无关。

$$L = \frac{1}{y}\int_{x_0}^{x}\frac{xdx}{r} - x^2\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2 r} + C$$

$$= \frac{1}{y}\int_{x_0}^{x}\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}} - x^2\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{y^2\sqrt{x^2+y^2}} + C$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y} + C$$

和平面曲线积分一样，也有关于空间曲线积分与路往无关的四个等价命题：

空间区域（V）是三维单连通区域，且 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在（V）上有一阶连续偏导数，则有下面四个等价命题。

（1）在（V）中沿任何闭路（c），$\oint_c Pdx + Qdy + Rdz = 0$。

（2）对任一全部含在（V）内的曲线（l），曲线积分

$\int_{(l)} Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关（只依赖曲线的端点）.

（3） 微分式 $Pdx+Qdy+Rdz$ 在（V）内是某一个函数 $V(x,y,z)$的全微分，即 $dV=Pdx+Qdy+Rdz$.

（4） $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，$\dfrac{\partial Q}{\partial z}=\dfrac{\partial R}{\partial y}$，$\dfrac{\partial R}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial z}$，在（$V$）内处处成立.

我们只证明命题（1）$\Leftarrow\Rightarrow$命题（4）.

证 （$\Rightarrow$）由斯托克斯公式

$$\oint_{(c)} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{(S)}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+$$

$$+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

设在一闭曲线（c）上 $\oint_{(c)} Pdx+Qdy+Rdz=0$，若在（$V$）上有一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\neq 0 \quad （假定>0）$$

则在平面 $z=z_0$ 上有以 M_0 为心，r 为半径的足够小的圆（k），在（k）上 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq 0(>0)$，这时 $z=$常数，$dz=0$

由斯托克斯公式

$$\oint_{(c')} Pdx+Qdy+Rdz=\iint_{(k)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy>0$$

（其中（c'）是圆（k）的边界）

上式与题设矛盾，于是问题得证.

(⇐) 若 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$, 在 (V) 内处处成立，则根据斯托克斯公式得到在 (V) 中沿任何闭路 (c)

$$\oint_c Pdx+Qdy+Rdz=0$$

例 4 计算曲线积分

$$L=\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+xzdy+xydz$$

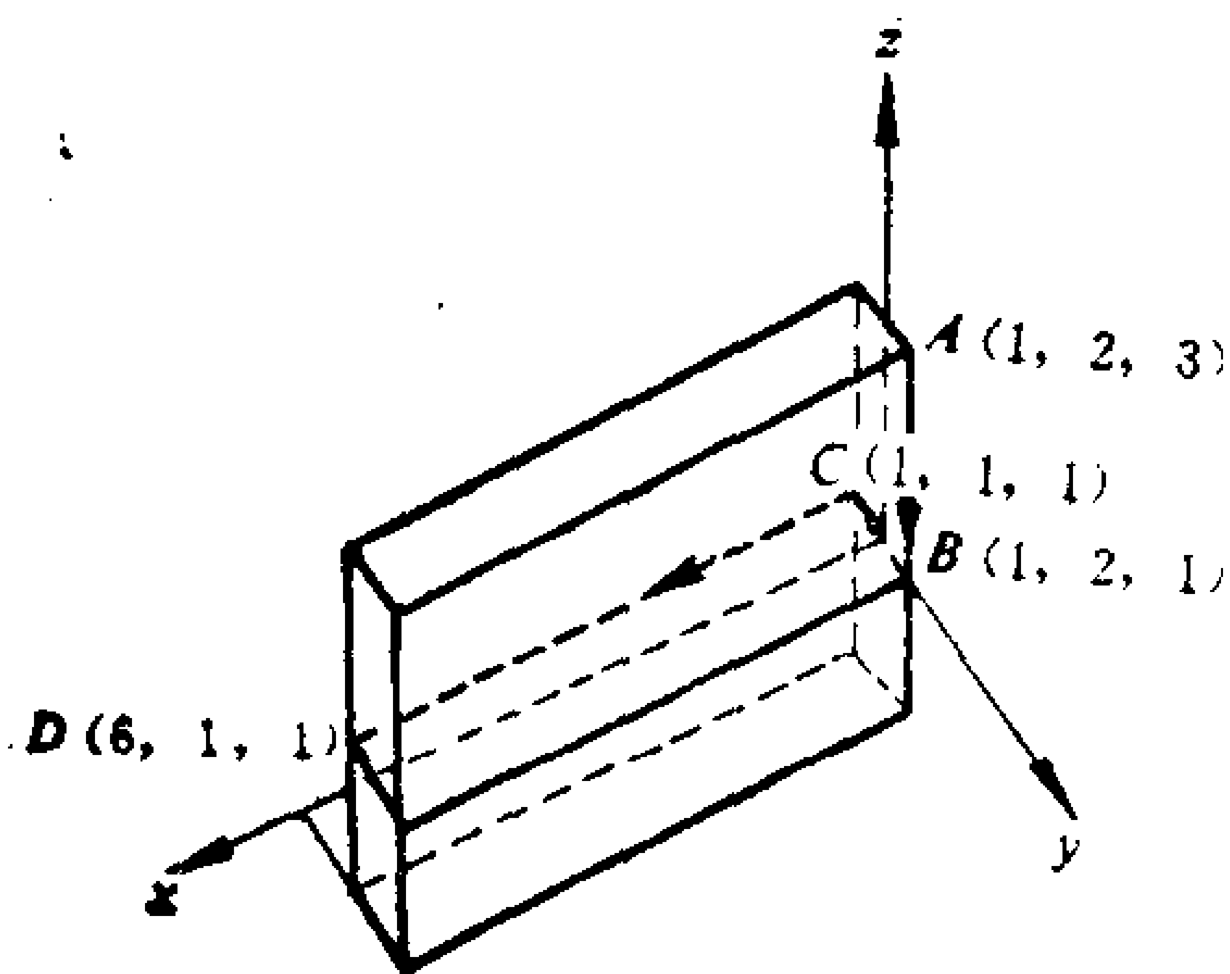


图 5

解 因为

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=z,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=x.$$

所以曲线积分 L 与积分路径无关。

我们选取（图 5）所示积分路径：

$$\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yzdx+xzdy+xydz$$

$$=\int_{\overline{CD}} yzdx+xzdy+xydz+\int_{\overline{BC}} yzdx+xzdy+xydz+$$

$$+\int_{\overline{AB}} yzdx+xzdy+xydz$$

$$=\int_1^6 1\cdot 1dx+\int_2^1 1\cdot 1dy+\int_3^1 1.2dz=0$$

例 5 证明等式

$$\iiint\limits_{(V)}(v\Delta u-u\Delta V)\ dx\,dy\,dz$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)}\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)d\sigma$$

式中 $u(x,y,z)$，$v(x,y,z)$在三维空间（V）上连续且有二阶连续偏导数，（σ）是(V)的边界曲面，$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$，$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$.

证 令 $P=vu'_x-uv'_x=v\frac{\partial u}{\partial x}-u\frac{\partial v}{\partial x}$

$$Q=vu'_y-uv'_y=v\frac{\partial u}{\partial y}-u\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$R=vu'_z-uv'_z=v\frac{\partial u}{\partial z}-u\frac{\partial v}{\partial z}$$

则 $$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-$$

$$-u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

$$=v\Delta u-u\Delta v$$

且 $P\cos(x,\vec{n})+Q\cos(y,\vec{n})+R\cos(z,\vec{n})$

$$=v\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos(x,\vec{n})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(y,\vec{n})+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(z,\vec{n})\right]-$$

$$u\left[\frac{\partial v}{\partial x}\cos(x,\vec{n})+\frac{\partial v}{\partial y}\cos(y,\vec{n})+\frac{\partial v}{\partial z}\cos(z,\vec{n})\right[$$

$$=v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}$$

将以上结果代入高斯公式

$$\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$=\iint\limits_{(\sigma)}[P\cos(x,\vec{n})+Q\cos(y,\vec{n})+R\cos(z,\vec{n})]d\sigma$$

便是要求证的等式。

例 6 证明等式：

$$\iiint\limits_{(V)}\Delta u dxdydz=\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma$$

此处 $\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$

证 由例 5 结果可设 $v=1$，则 $\Delta v=0$，即可得所证等式。

例 7 若 $u(x,y,z)$是互域 D 上的调和函数，则

$$\iint\limits_{(\sigma)}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma=0.$$

此处(σ)是一封闭曲面。

由例 6 很容易证明。留给读者。

例 8 若 $u(x,y,z)$是以 R 为半径，以点 $M(x_1,y_1,z_1)$为球心的球面$(\overline{\sigma})$内的调和函数，试证等式：

$$u(x_1,y_1,z_1)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(\sigma)}u(x,y,z)d\sigma$$

证 考虑区域 Ω，它是由两个半径分别为 ρ和$R(R>\rho)$，球心为 $M(x_1,y_1,z_1)$的球$(\underline{\sigma})$和$(\overline{\sigma})$所围，在区域 Ω 上应用公式

$$\iiint\limits_{(\Omega)} (v\Delta u - u\Delta v)\, dxdydz = \iint\limits_{(\underline{\sigma})+(\overline{\sigma})} \left(v\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\delta v}{\partial n}\right)d\sigma$$

其中 $u(x,y,z)$就是题设的调和函数

取 $v = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}}$，由上面的公式得到

$$\iint\limits_{(\underline{\sigma})+(\sigma)} \left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma = 0$$

或

$$\iint\limits_{(\underline{\sigma})}\left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma + \iint\limits_{(\overline{\sigma})}\left(\frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}\right)d\sigma = 0$$

在曲面$(\underline{\sigma})$和$(\overline{\sigma})$上$\frac{1}{r}$分别等于常数$\frac{1}{\rho}$和$\frac{1}{R}$，取$(\underline{\sigma})$和$(\overline{\sigma})$的外侧，由例 7 我们得到

$$\frac{1}{R}\iint\limits_{(\overline{\sigma})}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0$$

$$\frac{1}{\rho}\iint\limits_{(\underline{\sigma})}\frac{\partial u}{\partial n}d\sigma = 0.$$

代入上式得

$$-\iint\limits_{(\underline{\sigma})} u\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n}d\sigma + \iint\limits_{(\overline{\sigma})} u\frac{\partial\left(\frac{r}{r}\right)}{\partial n}d\sigma = 0$$

但是

$$\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial n} = \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dr} = -\frac{1}{r^2}.$$

所以

$$\iint\limits_{(\sigma)} u\frac{1}{r^2}d\sigma - \iint\limits_{(\bar{\sigma})} u\frac{1}{r^2}d\lambda = 0$$

或

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(\sigma)} ud\sigma = \frac{1}{R^2}\iint\limits_{(\bar{\sigma})} ud\sigma \qquad (1)$$

对上式的左端应用积分中值定理：

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(\sigma)} ud\sigma = \frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{\rho^2}\iint\limits_{(\sigma)} d\sigma \qquad (2)$$

$$= \frac{u(\xi,\eta,\zeta)}{\rho^2}4\pi\rho^2 = 4\pi u(\xi,\eta,\zeta)$$

(ξ,η,ζ)在以$M(x_1,y_1,z_1)$为心，ρ为半径的球面上，令$\rho\to 0$，则 $u(\xi,\eta,\zeta)\to u(x_1,y_1,z_1)$所以

$$\frac{1}{\rho^2}\iint\limits_{(\sigma)} ud\sigma \to u(x_1,y_1,z_1) = 4\pi.$$

(1) 式的右端与ρ无关，当$\rho\to 0$时，(1) 式变为

$$\frac{1}{R^2}\iint\limits_{(\bar{\sigma})} ud\sigma = 4\pi u(x_1,y_1,z_1)$$

或

$$u(x_1,y_1,z_1) = \frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{(\bar{\sigma})} ud\sigma.$$

§ 3　场论初步

场本来是物理学的研究对象；如温度场、电磁场、重

力场等。这些场既有不同的物理性质，但表现在数量关系上可分为数量场和向量场。本节只要求掌握场论中几个概念和计算方法。

描写数量场的量是一个数量函数

$$u = u(P)$$

其中 P 是空间上的点.

描写向量场的量是向量函数。

$$\vec{a} = \vec{a}(P)$$

向量 $\vec{a}$ 在直角坐标系可表为

$$\vec{a}(P) = a_x(P)\vec{i} + a_y(P)\vec{j} + a_z(P)\vec{k}$$

其中 $a_x(P), a_y(P), a_z(P)$ 是向量 $\vec{a}(P)$ 分别在 x 轴, y 轴和 z 轴上的分量。

我们只研究以下三种特殊的场。

1°. 数量场 $u(x,y,z)$ 的梯度

$$\mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

构成一个向量场。

梯度的几何意义：梯度是函数值变化最快的方向*，沿梯度方向方向导数取最大值。

2°. 向量场的散度.

在直角坐标系中给定了向量函数 $\vec{a}(x,y,z) = a_x(x,y,z)\vec{i} + a_y(x,y,z)\vec{j} + a_z(x,y,z)\vec{k}$，则 $\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$ 称为向量函数 $\vec{a}(P)$ 的散度，它形成一个数量场，记作

$$\mathrm{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

散度的另一定义：设有向量场$\vec{a}(P)$，在场中作一包围M点的闭曲面S，并设S所围的体积为V，当$V\to M$时，若极限

$$\lim_{V\to M}\frac{\iint_S \vec{a}\cdot d\vec{s}}{V}$$

存在，便称此极限为向量场$\vec{a}$在$M(x,y,z)$点的散度，记作

$$\operatorname{div}\vec{a}\Big|_M$$

后一种散度定义与坐标轴的选取无关。

3°. 向量场的旋度

定义 向量场$\vec{a}(x,y,z)$的旋度为向量$\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)$，记作$\operatorname{rot}\vec{a}$，又简记为

$$\operatorname{rot}\vec{a}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

旋度的另一定义：取含有M点、选定方向$\vec{n}$为法线的一块小平面区域σ，且设l为σ的边界，极限

$$\lim_{\sigma\to M}\frac{\int_l a_\tau\, dl}{\sigma}$$

存在(a_τ表示向量$\vec{a}$在曲线l的切线上的投影)，称为$\operatorname{rot}\vec{a}$在任意方向$\vec{n}$上的投影。记作

$$\mathrm{rot}_n \vec{a}\Big|_M$$

根据上面定义，可以把高斯公式改写为：

$$\iint_{(S)} \vec{a} \cdot \vec{ds} = \iiint_{(V)} \mathrm{div}\vec{a}\, dV$$

斯托克斯公式可写为：$\int_{(l)} \vec{a_t} \cdot \vec{dl} = \iint_{\sigma} \mathrm{rot}_n \vec{a}\, d\sigma$

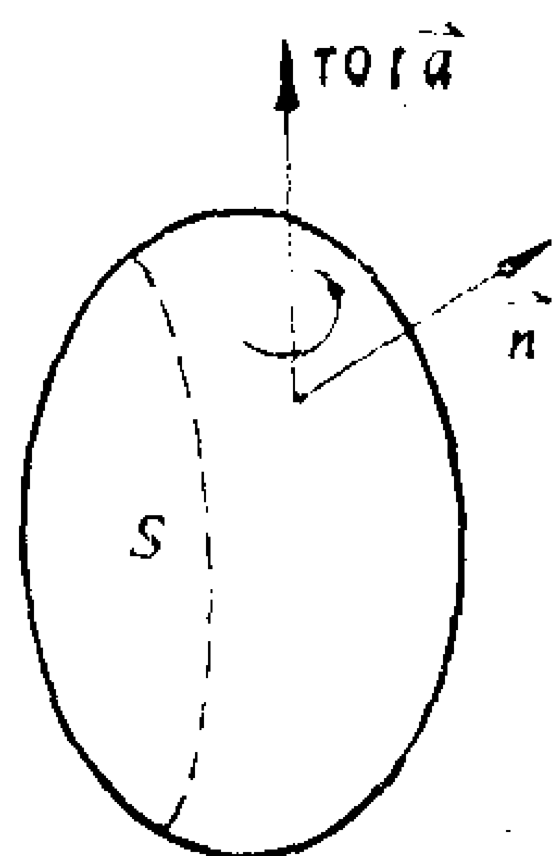


图 6

关于梯度、散度、旋度三个概念如果不结合物理意义是很难理解的，为此下面举几个例子帮助读者加深理解这三个概念。

1° 梯度

在数量场中我们引入等值面的概念，例如给出温度场中的等值面就可以知道温度场中温度的分布情况。但在实践中还常常需要知道温度沿某个方向的变化率，这就需要引入方向导数的概念，甚至我们还要知道沿那个方向变化率最大，这就是引入梯度的根据。

设有数量函数 $u = u(P)$

不妨设 P 是平面中的点(x,y)。

设 l 是由点(x,y)出发引出的一条射线，那么函数 u 沿 l 的方向导数：

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta$$
$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \cdot (\cos\alpha, \cos\beta) \qquad (1)$$

式中$(\cos\alpha, \cos\beta)$是 l 方向的单位向量记作$\vec{l_0}$，向量$\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$

完全由函数 $u=u(x,y)$ 决定与 l 的方向无关. 现在的问题是分析单位向量 $\vec{l_0}$ 取什么方向时 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 最大，令 $\vec{G}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$，则(1)式可写成

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l_0}=|\vec{G}|\cos(\vec{G},\vec{l_0}) \qquad (2)$$

当 $\cos(\vec{G},\vec{l_0})=1$ 时，(2)式中的 $\frac{\partial u}{\partial l}$ 最大且 $\frac{\partial u}{\partial l}=|G|$，也就是说，函数 $u=u(P)$ 沿向量 $\vec{G}$ 方向的变化率最大，称向量 $\vec{G}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ 为函数 $u=u(P)$ 的梯度. 由上面的分析对于梯度给出的定义就没有什么难以理解的了.

例 1 给定数量函数 $u=u(x,y,z)$，试证 grad u 与等值面的切面互相垂直，梯度方向是等值面的法方向.

证 设 $\vec{l}$ 是等值面 $u(x,y,z)=C$ 上的任意切向量，则 $\frac{\partial u}{\partial l}=0$.

$$\therefore \quad \text{grad}\, u\cdot\vec{l}=0$$

即 grad u 与等值面的切面相垂直，也就是梯度是等值面的法线向量.

例 2 空间有一带电量为 q 的电荷，电位

$$V=\frac{q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{q}{r}$$

其中 r 是空间某点 (x,y,z) 到电荷的距离. 求电位场的梯度。

解
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{qx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{qx}{r^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{qy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{qy}{r^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z}=-\frac{qz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{qz}{r^3}$$

$$\therefore\quad \text{grad}\, v=-\frac{qx}{r^3}\vec{i}-\frac{qy}{r^3}\vec{j}-\frac{qz}{r^3}\vec{k}$$

$$=-\frac{q}{r^3}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$=-\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

而电荷 q 所产生的电场强度为

$$\vec{E}=\frac{q}{r^3}\vec{r}$$

$$\therefore\quad \vec{E}=-\text{grad}\, v.$$

由此得到电场强度的方向与电位梯度方向相反，大小相等。

2° 散度：给定空间流速场 $\vec{a}(P)$，而速度为 $\vec{a}$ 的流体，在单位时间内通过封闭曲面 S 的流量为

$$\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{a}\cdot d\vec{S} \tag{1}$$

假定封闭曲面 (S) 的法方向指向曲面的外侧，这时有三种可能情况：

1）积分值大于零：说明流体穿过 (S) 从内部流出的量多于从外部流入的量，也就是 (S) 内部有“源”，它不断流出流体。

2）积分值小于零：和上面的情况恰好相反，说明 (S) 内部有“洞”，它不断吸入流体。

3）积分值等于零：说明穿过 (S) 流出等于流入的流体，也就是 (S) 的内部既没有“源”也没有“洞”。

一般说来向量场的分布是不均匀的，因此用积分(1)不能刻划向量场中每一点的吸收或发散情况，为此才引入以下散度的概念，即考虑极限

$$\lim_{V \to M} \frac{\oint\!\!\!\oint_{(S)} \vec{u} \cdot d\vec{S}}{V} \qquad (2)$$

向量场 $\vec{a}(P)$ 的每一点都有一个散度，散度是数量，所以向量场的散度构成一个数量场，这个场称为散度场。

例 3 设电荷 q 位于坐标原点，它在真空中产生一个静电场，设 (S) 是以 q 为中心，r 为半径的球面，场中任一点 P 处的电场强度为

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}$$

其中 $\vec{r}$ 是点 P 到点电荷 q 的距离，设 $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ 是比例系数，求场中 P 点处电场强度 $\vec{E}$ 的散度。

解 设 P 点坐标为 (x,y,z)，则

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = \left|\vec{r}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{E} = k \cdot \frac{1}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = k\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = k\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = k\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$ 于是

$$\operatorname{div}\vec{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=k\frac{3r^2-3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}=0 \qquad (3)$$

由此可见，除原点以外的这个静电场是无源的。

现在看原点的情形。(3)式在原点无意义，以原点为中心，取任意半径 r 作球面 Σ; Σ的法线与 $\vec{E}$ 的方向一致。从而$E_n=E$，于是

$$\oiint_{\Sigma} E_n dS=\oiint_{\Sigma}\frac{q}{r^2}dS=\frac{q}{r^2}\oiint_{\Sigma} dS=\frac{q}{r^2}4\pi r^2=4\pi q$$

对于包围着原点任意作曲面 S，不难证明

$$\oiint_{S} E_n dS=\oiint_{\Sigma} E_n dS=4\pi q$$

左端的曲面积分表示静电场对于 S 的电通量，这电通量与 S 的形状无关，(S)收缩为原点一点时还是一样。说明这个静电场里只有原点一点是源。

3° 旋度

旋度是描写向量场的一个重要概念，教科书中有关旋度的两种定义，如果不给它以实际背景是很不好理解的，为了帮助读者理解这个概念，我们考虑一个不可压缩流体的流速场 $\vec{V}(P)$，l 是场内一封闭曲线，则称积分

$$L=\oint_{l} V_{\tau}(P)dS$$

为流速场 $\vec{V}(P)$ 沿曲线 l 的环流。(其中 V_{τ} 表示向量 $\vec{V}$ 在曲线 l 的切线上的投影)。

取场内任意一点 P，通过 P 任意作一向量 $\vec{n}$，以 P 为垂足做平面 π 垂直于 $\vec{n}$，在平面 π 上围绕 P 做封闭曲线 l，设 l 在 π 上所围的区域为σ，于是，σ就是这样一块曲面，它以 l

为边缘，而以 $\vec{n}$ 为法线。

取 $\vec{V}(P)$ 沿 l 的环流。

$$L=\oint_l V_\tau dS$$

当区域 σ 无限缩小而趋于 P 时，求比值 $\frac{L}{\sigma}$ 的极限

$$\lim_{\sigma\to P}\frac{L}{\sigma}=\lim_{\sigma\to P}\frac{1}{\sigma}\oint_l V_\tau dS.$$

我们称这极限为平面 π 上 P 点的环流密度。根据斯托克斯公式及积分中值定理。

$$\frac{1}{\sigma}\oint_l V_\tau dS=\frac{1}{\sigma}\iint_\sigma(\mathrm{rot}V(P))_n dS=(\mathrm{rot}\vec{V}(P'))_n$$

其中 $P'\in\sigma$，因此取极限后

$$(\mathrm{rot}\,\vec{V}(P))_n=\lim_{\sigma\to P}\frac{L}{\sigma}$$

这就是说在 P 点 $\vec{V}(P)$ 的旋度是这样一个向量，它在任何方向 $\vec{n}$ 上的投影等于在通过 P 点而与 $\vec{n}$ 垂直的平面 π 上 P 点的环流密度。

上面只说了旋度定义中所考虑的那个极限的意义，想要明白旋度与刚体运动的旋转有什么关系，要先讲角速度向量的概念。

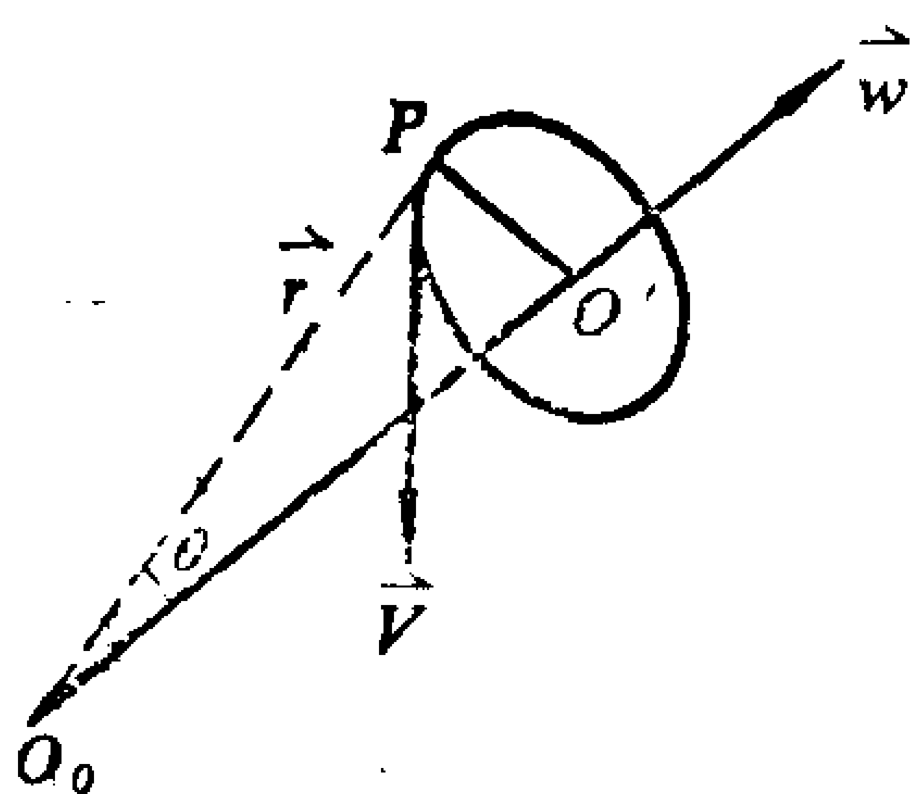


图 7

假定 P 点围绕一轴以角速度 ω 旋转，设它的旋转中心是 O'，在轴上任选一点 O_0，并写 $\vec{r}=\overrightarrow{O_0P}$，设 P 的线速度为

$\vec{V}$，则$\vec{V}$的方向垂直于平面O_0PO'，它的长

$$\left|\vec{V}\right| = \omega\left|\vec{r}\right|\sin\theta$$

其中θ是$\vec{r}$与旋轴的夹角。

我们很自然引入角速度向量$\vec{\omega}$，规定$\vec{\omega}$的方向与旋转轴$\overline{O_0O'}$平行，且使$\vec{\omega}$，$\vec{r}$，$\vec{V}$三者形成右手系统，并规定

$$\left|\vec{\omega}\right| = \omega$$

在这样的规定下，便有一个简单的关系式

$$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r} \qquad (A)$$

现在考虑一个刚体有移动又有转动的运动（图8），在刚体内选定一点O_0，考虑刚体内任一点P在任一瞬时t的运动情况，设在瞬时t，O_0点的速度为$\vec{V}_0$，于是P点的速度

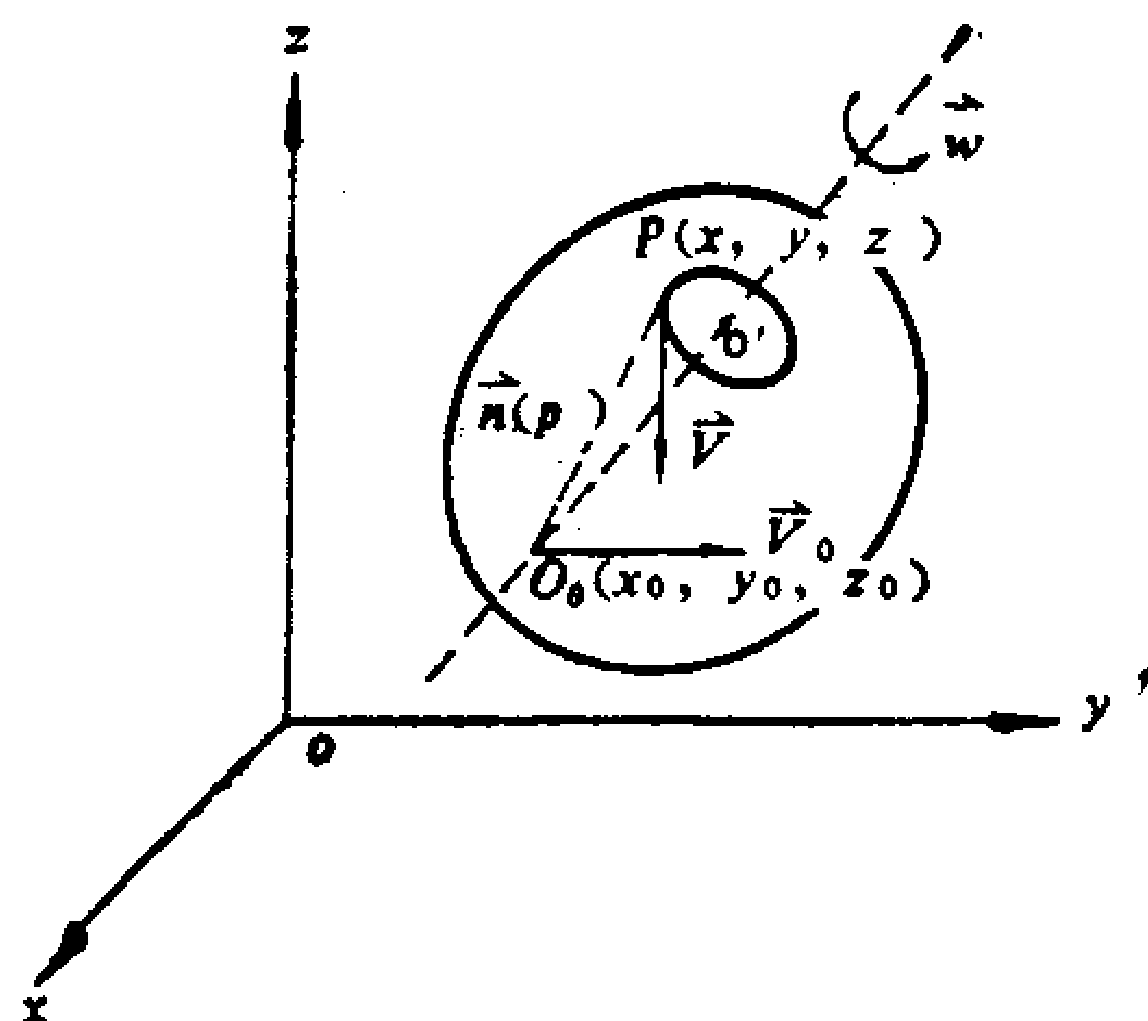


图 8

$$\vec{A}(P) = \vec{V}_0 + \vec{V}(P)$$

其中$\vec{V}(P)$是相关于O_0的速度，P相关于O_0的运动可以看成围绕过O_0的某一旋转轴的转动，如设$\overrightarrow{O_0P} = \vec{r}(P)$且P点相关于旋转轴的角速度为$\vec{\omega}(P)$，由$(A)$式$\vec{V}(P) = \vec{\omega}(P)\times\vec{r}(P)$，其中$\vec{r}(P) = \overrightarrow{O_0P}$，因而在时刻$t$，P的全速度

$$\vec{A}(P) = \vec{V}_0 + \vec{\omega}(P)\times\vec{r}(P)$$

于是

$$\operatorname{rot}\vec{A}(P) = \operatorname{rot}(\vec{V}_0 + \vec{\omega}(P)\times\vec{r}(P))$$

由于$\vec{V}_0$与P点无关，所以$\operatorname{rot}\vec{V}_0 = 0$，所以

$$\mathrm{rot}\vec{A}(P) = \mathrm{rot}(\vec{\omega}(P) \times \vec{r}(P))$$

由于

$$\vec{\omega}(P) \times \vec{r}(P) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \end{vmatrix}$$

$$\therefore \quad \mathrm{rot}\vec{A}(P) = 2\omega_1\vec{i} + 2\omega_2\vec{j} + 2\omega_3\vec{k} = 2\vec{\omega}(P)$$

由此可见有移动又有转动的刚体运动的全速度的旋转等于只有转动性质的角速度的两倍，这就是"旋度"一词的来源。

以下几个例题可以由学生自己完成。

例 4 算子∇在场论中起着重要的作用，定义为：$\nabla u = \mathrm{grad}\, u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$，根据定义很容易证明：

1° 如果 c_1 和 c_2 是常数，则

$$\nabla(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\nabla u_1 + c_2\nabla u_2$$

2° $\nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$

3° $\nabla f(u) = f'(u)\nabla u$

例 5 证明：如果 u 是线性函数：

$$u = ax + by + cz + d$$

则 $\mathrm{grad}u$ 是常向量，反之，如果 $\mathrm{grad}u$ 是常向量，则 u 是线性函数。

例 6 计算场$u = (ax + by + c)r$ 的梯度，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。

例 7 给定场 $\vec{a} = \vec{a}(P)$，它的散度可以写成∇与$\vec{a}(P)$的数量积。

$$\operatorname{div}\vec{a}(P)=\nabla\cdot\vec{a}=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot$$

$$\cdot\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}a_x\vec{i}+$$

$$+\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}a_y\vec{j}+\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}a_z\vec{k}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}a_x\vec{i}$$

$$+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}a_y\vec{j}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}a_z\vec{k}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}a_x\vec{i}$$

$$+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}a_y\vec{j}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}a_z\vec{k}=\frac{\partial a_x}{\partial x}+\frac{\partial a_y}{\partial y}+\frac{\partial a_z}{\partial z}$$

如果 c_1 和 c_2 是常数，则

$$\nabla\cdot(c_1\vec{a}_1+c_2\vec{a}_2)=c_1(\nabla\cdot a_1)+c_2(\nabla\cdot a_2)$$

如果 $\vec{a}=u(P)\vec{c}$，其中 $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ 是常向量，而 $u(P)$ 是数量场，则

$$\nabla\cdot u\vec{c}=\vec{c}\cdot\nabla u$$

如果 $\vec{c}=\vec{c}(P)$ 是变向量，则

$$\nabla\cdot u\vec{c}=\vec{c}\cdot\nabla u+u(\nabla\cdot\vec{c})$$

例 8　给定向量场 $\vec{a}(P)$ 用 ∇ 与 $\vec{a}(P)$ 的向量积来表示 rot $\vec{a}(P)$：

$$\operatorname{rot}\vec{a}(P)=\nabla\times\vec{a}$$

$$\nabla\times\vec{a}=\left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})$$

$$=\vec{i}\cdot\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial a_y}{\partial x}\vec{j}+\frac{\partial a_z}{\partial x}\vec{k}\right)+\vec{j}\cdot\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\vec{i}+\frac{\partial a_y}{\partial y}\vec{j}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial a_z}{\partial y}\vec{k}\right)+\vec{k}\cdot\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\vec{i}+\frac{\partial a_y}{\partial z}\vec{j}+\frac{\partial a_z}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

例 9 给定数量场 $u=u(P)$，因为 $\nabla u=\mathrm{grad}u$ 是向量场，算子 ∇ 按两种乘法的形式作用于 ∇u，造成两种微分运算：一种是

$$\nabla\cdot\nabla u=\mathrm{div\ grad}u$$

另一种是

$$\nabla\times\nabla u=\mathrm{rot\ grad}u$$

如果给定向量场 $\vec{a}=\vec{a}(P)$，这时 $\nabla\cdot\vec{a}=\mathrm{div}\vec{a}$ 是数量场，算子 ∇ 只有一种方法作用于它，即构成

$$\nabla(\nabla\cdot a)=\mathrm{grad\ div}\ \vec{a}$$

因为 $\nabla\times a=\mathrm{rot}\ \vec{a}$ 是向量场，故

$$\nabla\cdot(\nabla\times\vec{a})=\mathrm{div\ rot}\ \vec{a}$$

和

$$\nabla\times(\nabla\times a)=\mathrm{rot\ rot}\ \vec{a}.$$

容易证明

$$\mathrm{rot\ grad}u\equiv 0$$

$$\mathrm{div\ rot}\ \vec{a}\equiv 0$$

$$\mathrm{div\ grad}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

简单地把它记作 Δu。

$$\mathrm{div\ grad}\ u=\Delta u$$

算子Δ叫做拉普拉斯算子，因为

$$\Delta u=\nabla\cdot\nabla u=(\nabla\cdot\nabla)u$$

故Δ是算子∇与自己的数量积：

$$\Delta=(\nabla\cdot\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

根据上面的定义可以证明公式：

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{a})=\nabla(\nabla\cdot\vec{a})-(\nabla\cdot\nabla)\vec{a}$$

或 $\quad \text{rot}\ \text{rot}\,\vec{a}=\text{grad}\,\text{div}\,\vec{a}-\Delta\vec{a}$.

以下是关于梯度、散度和旋度的应用和计算的例题，主要是由学生完成。

例 10 求证 $u=x^2+y^2+z^2$ 沿已知点 $M(1,1,1)$的向径 $\vec{r}$ 的方向导数等于它在点 M 梯度的大小。

证 $\text{grad}\,u\big|_M=2(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})\big|_M=2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})$

$\left|\text{grad}\,u\big|_M\right|=2\sqrt{3}$.

由于 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\Big|_M$$

$$=2x\frac{x}{r}+2y\frac{y}{r}+2z\frac{z}{r}\Big|_M$$

$$=\frac{2u}{r}\Big|_M=2\sqrt{3}$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$是向径 $\vec{r}$ 的方向余弦。

例 11 求场 $u=u(x,y,z)$在场 $v=v(x,y,z)$的梯度方向的导数，在什么条件下导数等于零?

解 $\text{grad}\,v=\frac{\partial v}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial v}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial v}{\partial z}\vec{k}$

$$=|\text{grad}\,v|(\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos r\,\vec{k})$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是 $\mathrm{grad}\,v$ 的方向余弦。

如果用 $\vec{l}$ 表示方向$\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

$$=\frac{1}{|\mathrm{grad}\,v|}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v}{|\mathrm{grad}\,v|}$$

当 $\mathrm{grad}\,u\perp\mathrm{grad}\,v$ 时，$\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v=0$，此时

$$\frac{\partial u}{\partial l}=0$$

例 12 证明向量场 $\vec{a}(P)$ 的散度在正交坐标系中与坐标轴的平移无关。

证 设点 M 在新旧坐标系的坐标分别为 (X,Y,Z) 及 (x,y,z) 又设 $\vec{i'}$，$\vec{j'}$，$\vec{k'}$ 及 $\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$ 分别表示新旧坐标系中的基本单位向量，则

$$\vec{a}(M)=a_X(X,Y,Z)\vec{i'}+a_Y(X,Y,Z)\vec{j'}+a_Z(X,Y,Z)\vec{k'}$$

及

$$\vec{a}(M)=a_x(x,y,z)\vec{i}+a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

显然有

$$a_x(x,y,z)=a_X(X,Y,Z)$$
$$a_y(x,y,z)=a_Y(X,Y,Z)$$
$$a_z(x,y,z)=a_Z(X,Y,Z)$$

故得

$$\frac{\partial}{\partial x}a_x(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial y}a_y(x,y,z)+\frac{\partial}{\partial z}a_z(x,y,z)$$

$$= \frac{\partial}{\partial X} a_X(X,Y,Z) + \frac{\partial}{\partial Y} a_Y(X,Y,Z) + \frac{\partial}{\partial Z} a_Z(X,Y,Z)$$

即 $\vec{a}(P)$ 的散度与坐标轴的平移无关。

例 13 求 $\nabla \cdot (\nabla f(r))$，其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$，在什么情况下 $\nabla \cdot (\nabla f(r)) = 0$。

解 $\nabla f(r) = \frac{df}{dr} x \vec{i} + \frac{df}{dr} y \vec{j} + \frac{df}{dr} z \vec{k}$

$$= f'(r)[x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}]$$

$\therefore$ $\nabla \cdot \nabla f(r) = \nabla \cdot f'(r) [x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}]$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r} f'(r)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r} f'(r)\right] + \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r} f'(r)\right]$$

$$= \frac{3f'(r)}{r} + f''(r)\left[\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}\right] + f'(r)\left[-\frac{x^2}{r^3} - \frac{y^2}{r^3} - \frac{z^2}{r^3}\right]$$

$$= \frac{2f'(r)}{r} + f''(r)$$

当 $\frac{2f'(r)}{r} + f''(r) = 0$ 时，$\nabla \cdot (\nabla f(r)) = 0$。

令 $f'(r) = u$，则 $\frac{2u}{r} + \frac{du}{dr} = 0$ 即

$$\frac{du}{u} = -\frac{2dr}{r}$$

积分得

$$\ln|u| = \ln\left|\frac{c_1}{r^2}\right|$$

即

$$f'(r)=\frac{c_1}{r^2}$$

再积分得

$$f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$$

其中c_1，c_2为任意常数。

故当$f(r)=-\frac{c_1}{r}+c_2$时，$\nabla\cdot(\nabla f(r))=0$。

例 14 求$\nabla\times[f(r)\vec{r}]$，其中$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

解 由于$f(r)\vec{r}=f(r)x\vec{i}+f(r)y\vec{j}+f(r)z\vec{k}$

$$\nabla\times[f(r)\vec{r}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ f(r)x & f(r)y & f(r)z\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}f(r)z\vec{i}+\frac{\partial}{\partial x}f(r)y\vec{k}+\frac{\partial}{\partial z}f(r)x\vec{j}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}f(r)x\vec{k}-\frac{\partial}{\partial z}f(r)y\vec{i}-\frac{\partial}{\partial x}f(r)z\vec{j}$$

$$=(f'(r)yz-f'(r)zy)\vec{i}+(f'(r)zx\vec{j}$$

$$-f'(r)xz)\vec{j}+(f'(r)xy-f'(r)xy)\vec{k}$$

$$=0$$

例 15 求向量$\vec{a}=yz\vec{i}+xz\vec{j}+xy\vec{k}$的流量.

a）穿过圆柱$x^2+y^2=a^2(0\leqslant z\leqslant k)$的侧表面。

b）穿过此圆柱的全表面。

解 a）设圆柱的侧表面S的外侧为正侧，则流量

$$Q=\iint_S yzdydz+xzdxdz+xydxdy$$

将 S 分为两个曲面 S_1 和 S_2，其中

S_1：$x=\sqrt{a^2-y^2}$，　法线与 ox 轴正向交成锐角

S_2：$x=-\sqrt{a^2-y^2}$，法线与 ox 轴正向交成钝角

显然
$$\iint_S xydxdy=0$$

又由对称性可知

$$\iint_S yzdydz+xzdxdz=2\iint_S yzdydz$$

$$=2\iint_{S_1} yzdydz+2\iint_{S_1} yzdydz$$

$$=2\iint_{D_{yz}} yzdydz-2\iint_{D_{yz}} yzdydz=0$$

其中 D_{yz} 是曲面 S_1 和 S_2 在 yoz 平面上的投影域，由上得到 $Q=0$。

b）设圆柱的全表面 Σ，并取外侧，则由高斯公式得

$$Q=\oiint_\Sigma yzdydz+zxdzdx+xydxdy$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial(yz)}{\partial x}+\frac{\partial(zx)}{\partial y}+\frac{\partial(xy)}{\partial z}\right]dxdydz=0.$$

例 16　给定平面的稳流速度向量。

$$\vec{w}=u(x,y)\vec{i}+v(x,y)\vec{j}$$

求1）过包围域 S 的封闭曲线 c 所流出的液体的量。

2）速度向量 $\vec{w}$ 沿着围线 c 的环流 T。

解 1）设流体的密度为 $\rho(x,y)$，则流出液体的量为：

$$Q=\oint_c \rho\vec{w}\cdot\vec{n}\,dS$$

其中 $\vec{n}$ 为闭曲线 c 上的点的外法线方向的单位向量。

设 t 为曲线 c 上的点切线方向的单位向量，且设

$$\vec{t}=\cos\alpha\,\vec{i}+\sin\alpha\,\vec{j}$$

则因

$$(\vec{t},x)=\alpha=\frac{\pi}{2}+(\vec{n},x)$$

$$=\pi+(\vec{n},x)$$

$$(\vec{t},y)=(\vec{n},x)=\alpha-\frac{\pi}{2}$$

故得

$$\vec{n}=\cos(x,\vec{n})\,\vec{i}+\cos(y,\vec{n})\,\vec{j}$$

$$=\sin\alpha\,\vec{i}-\cos\alpha\,\vec{j}$$

由此得流量

$$Q=\oint_c \rho(u\,\vec{i}+v\,\vec{j})\cdot(\sin\alpha\,\vec{i}-\cos\alpha\,\vec{j})dS$$

$$=\oint_c \rho(u\sin\alpha-v\cos\alpha)dS$$

$$=\oint_c -\rho v dx+\rho u dy$$

用格林公式得

$$Q=\iint_S\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)\right]dxdy$$

2)
$$T=\oint_{c}\rho\vec{w}\cdot dS=\oint_{c}\rho(udx+vdy)$$

用格林公式得

$$T=\iint_{S}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho v)-\frac{\partial}{\partial y}(\rho u)\right]dxdy.$$

第十七章　含参变量的积分

在数学理论的发展与实际应用中，由于需要而逐渐产生了一些用来表示函数的新的形式。其中常见的有无穷级数、隐函数、含参变量的（常义或广义）积分、微分方程等等。当然，把一个函数用某种方式表达出来还不够，还要进一步研究它的各种性质。

在分析课上，讨论了含参变量积分的各种分析性质及其应用。这里涉及的概念和定理不难接受，但在开始阶段，学生常常觉得积分表示的函数不够真实，总希望把它“积出来”，再去讨论它的性质。其实，含参变量积分多半很难直接“积出来”，甚至不可能“积出来”（如果这样它就表示一个非初等函数）。因此应当学会如何讨论积分式所表达的函数。有些含参量积分，不容易直接积分出来，但可以用其他方法计算出来，这里用到的方法和技巧，学生也感到难以掌握。针对这些问题习作课可以安排一些例题及练习。

§1　含参变量常义积分的极限和连续

例 1　讨论函数 $F(y)=\int_0^1 x|x-y|dx$ 的连续性并画出其图象。

解　$F(y)$ 可以分段表示出来：

当 $y\leqslant 0$，$F(y)=\int_0^1 x(x-y)dx=\frac{1}{3}-\frac{y}{2}$

当 $0<y<1$，$F(y)=\int_0^y x(y-x)dx+\int_y^1 x(x-y)dx$

$$=\frac{y^3}{3}-\frac{y}{2}+\frac{1}{3}$$

当 $y\geqslant 1$，$F(y)=\int_0^1 x(y-x)dx=\frac{y}{2}-\frac{1}{3}$

$$\therefore\quad F(y)=\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{y}{2} & 当\quad y\leqslant 0\\ \frac{y^3}{3}-\frac{y}{2}+\frac{1}{3} & 当\quad 0<y<1\\ \frac{y}{2}-\frac{1}{3} & 当\quad y\geqslant 1\end{cases}$$

由 $F(y)$ 的表达式可知 $F(y)$ 在整个数轴上连续，其图象见图 1.

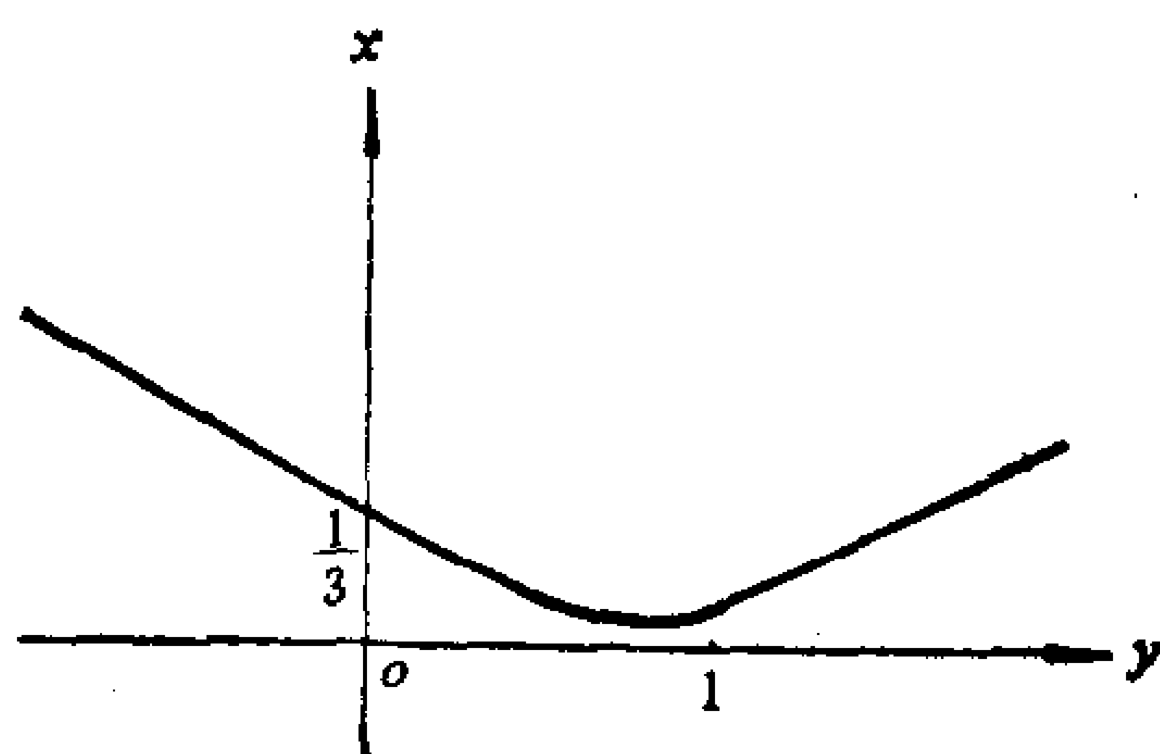


图 1

如果只讨论 F 的连续性，那就不必积分出来。由于被积函数 $f(x,y)=x|x-y|$ 在整个平面上连续，根据含参数常义积分的连续性定理知 $F(y)=\int_0^1 x|x-y|dx$ 在整个数轴上连续。

例 2 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上正的连续函数，试讨论函数 $F(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}dx$ 的连续性。

讨论：问题需要确定 $F(y)$ 的定义域并区分出 $F(y)$

的连续点及不连续点。由于 $f(x)$ 未具体给出，不能作积分运算。

$$\text{设}\quad \varphi(x,y)=\begin{cases}\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}, & \text{当}(x,y)\neq(0,0)\text{且}0\leqslant x\leqslant 1\\ 0, & \text{当}(x,y)=(0,0)\text{且}0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

于是 $F(y)=\int_0^1\varphi(x,y)dx$

(1) 当 $y\neq 0$，$\varphi(x,y)$ 作为 x 的函数在 $[0,1]$ 连续，故可积。

当 $y=0$， $\varphi(x,y)\equiv 0$ $\quad\therefore\quad F(0)=0$

因此 F 的定义域是 $(-\infty, +\infty)$

(2) $\varphi(x,y)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$-\infty<y<+\infty$（但 $(x,y)\neq(0,0)$）连续。在 y 轴上，$\left|\dfrac{yf(x)}{x^2+y^2}\right|=\left|\dfrac{y+f(0)}{y^2}\right|$ $=\dfrac{f(0)}{|y|}\to+\infty$（当 $y\to 0$）因此，$\varphi(x,y)$ 在 $(0,0)$ 间断。

假设 $[c,d]$ 是任何一个不含有 $y=0$ 的区间即 $[c,d]\subset(0+\infty)$ 或 $[c,d]\subset(-\infty,0]$，$\varphi(x,y)$ 在 $[0,1]\times[c,d]$ 连续，根据连续性定理知 $F(y)$ 在 $[c,d]$ 连续，因此 $F(y)$ 在 $y\neq 0$ 连续。

$$F(0)=0,\text{而当 } y>0, F(y)=y\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+y^2}dx\geqslant y\int_0^1\frac{mdx}{x^2+y^2}$$

$$=my\cdot\frac{1}{y}\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\Big|_{x=0}^{x=1}=m\operatorname{arctg}\frac{1}{y}\to\frac{m\pi}{2}\quad(y\to 0^+)$$

其中 $m=\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{f(x)\}>0$。$\therefore$ $\lim\limits_{y\to 0^+}F(y)=F(0)$ 不成立。

（这样写并不表示 $\lim\limits_{y\to 0}F(y)$ 存在）

$\therefore$ $F(y)$ 在 $y=0$ 右侧不连续，因此 $F(y)$ 在 $y=0$ 间断。

想一想，证明中是否用到条件“$f(x)$ 是正的连续函数”？

例 3 计算 $\lim\limits_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx$。

解 由于被积函数 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 在全平面连续，因而 $F(y)=\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx$ 在整个数轴连续，因此有：

$$\lim_{y\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt{x^2+y^2}dx=F(0)=\int_{-1}^{1}|x|dx=2\int_{0}^{1}xdx=1$$

例 4 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ （n 是自然数）

解

含参数积分 $F(n)=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ 表示一个数列，为求 $\lim\limits_{n\to\infty}F(n)$，只要求出 $\lim\limits_{y\to 0^+}\int_{0}^{1}\frac{dx}{(1+xy)^{\frac{1}{y}}}$ 即可。

$$令\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0<y\leqslant 1\\ \dfrac{1}{1+e^x}, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ y=0\end{cases}$$

显见，$f(x,y)$ 在 $0\leqslant x\leqslant 1$，$0\leqslant y\leqslant 1$ 连续，因而 $F(y)=\int_{0}^{1}f(x,y)dx$ 在 $[0,1]$ 连续，

$$\therefore\quad \lim_{y\to 0^+}F(y)=F(0)$$

即 $$\lim_{y\to 0^+}\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+(1+xy)^{\frac{1}{y}}}=\int_{0}^{1}\frac{dx}{1+e^x}=\ln\frac{2e}{1+e}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{dx}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = \ln\frac{2e}{1+e}$$

练习 1 函数 $f(x,y)=\operatorname{sgn}(x-y)$ 在直线 $y=x$ 上每个点都不连续，试讨论函数 $F(y)=\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-y)dx$ 的连续性。并画出函数 $u=F(y)$ 的图象。

下面是几个含参数积分形式的数列极限练习题。其中有的解法较灵活，例 4 的解法不一定适用。这类题目常常可以利用积分性质（如中值定理，分部积分公式，变量替换公式），通过对积分估值来计算。还有一些特殊的方法，如付立叶级数一章要讲到的黎曼引理其证明方法也值得注意。

练习 2 证明 $\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=0$。

提示：可以先积分出来再计算，也可以直接对积分进行估值。后一种方法较简单。

练习 3 求 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$。

先指出以下证明的错误之处，再给出正确的证明。

证 根据积分中值定理，有

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{\pi}{2}\sin^n\xi \qquad (0<\xi<\pi/2)$$

而 $0<\sin\xi<1$，$\therefore$ $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\sin^n x dx = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\sin^n\xi = 0$

练习 4 证明若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，则

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(x)dx = f(1)$$

提示：由积分第一中值定理可得。

$$\int_0^1 nx^n f(x)\,dx = f(\xi_n)\int_0^1 nx^n\,dx = \frac{n}{1+n} f(\xi_n)$$

（其中 $0 \leqslant \xi_n \leqslant 1$）

但不能由此求出当 $n \to +\infty$ 时的极限。

考虑到 $\int_0^1 f(1) nx^n dx = f(1)\frac{n}{n+1} \to f(1)$

（当 $n \to +\infty$）

因此只要证明

$$\lim_{n \to \infty}\int_0^1 nx^n[f(x) - f(1)]dx = 0$$ 即可

同学们自己完成它的证明.

§2　含参变量常义积分的计算

对于含参变量常义积分 $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$，常常不容易直接积分出来（有时不可能积出来）。如果 $F'(y) = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx$ 能够积分出来，并且可以求出 $F'(y)$ 的一个原函数 $\Phi(y)$，则有 $F(y) = \Phi(y) + C$。如果还能通过适当方法确定常数 C，便可求出 $F(y)$。这是计算含参数积分的一种重要方法，应当要求学生很好掌握。在课本上用这种方法计算出

$$\int_0^{\pi/2} \ln(1 + \theta\cos x)dx = \pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\theta^2}}{2} \qquad (|\theta| < 1)$$

下面再安排几个类似的例题及练习。

例 1　计算 $F(y) = \int_0^\pi \ln(1 - 2y\cos x + y^2)dx \quad (|y| < 1)$

解 $F'(y)=\int_0^{\pi}\frac{2(y-\cos x)}{1-2y\cos x+y^2}dx$

$$=\frac{\pi}{y}+\frac{y^2-1}{y}\int_0^{\pi}\frac{dx}{(1+y^2)-2y\cos x}$$

$$=\frac{\pi}{y}-\frac{2}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{1-y^2}{(1-y)^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\Big|_{x=0}^{x=\pi}=0$$

$\therefore$ $F(y)=C$，再由 $F(0)=0$，知 $F(y)=0$ $(|y|<1)$

这解法是按本节开始所说的程序进行的．不过它没有说明运算的合理性．在计算之前，必须说明 $F(y)$ 是含参数的常义积分，并满足积分号下求导所要求的条件．不然，若 $F(y)$ 有瑕点，则需要验证的条件更为复杂．因此，在计算之前应当说明：

当 $0\leqslant x\leqslant\pi$，$-1<y<1$ 时，$1-2y\cos x+y^2\geqslant 1-2|y|+y^2=(1-|y|)^2>0$ $\therefore$ 对任何 $y\in(-1,1)$，$F(y)$ 是连续函数的积分．

又 $\ln(1-2y\cos x+y^2)$ 及 $\frac{\partial\ln(1-2y\cos x+y^2)}{\partial y}=\frac{2(y-\cos x)}{1-2y\cos x+y^2}$ 在$0\leqslant x\leqslant\pi$，$-1<y<1$ 上连续，因而对 $F(y)$ 可在积分号下求导．

例 2 计算 $I(y)=\int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2x)dx$ $(y>1)$

解 $\because$ $y>1$，$\therefore$ $\ln(y^2-\sin x)$ 及 $\frac{\partial\ln(y^2-\sin x)}{2y}=\frac{2y}{y^2-\sin x}$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi/2$，$y>1$ 时连续

因此对 $I(y)$ 可在积分号下求导：

$$I'(y)=\int_0^{\pi/2}\frac{2y}{y^2-\sin^2x}dx=2y\int_0^{\pi/2}\frac{\sec^2x}{y^2\sec^2x-\operatorname{tg}^2x}dx$$

$$\overset{u=\operatorname{tg}x}{=\!=\!=}2y\int_0^{+\infty}\frac{du}{y^2+(y^2-1)u^2}=\frac{2y}{y^2-1}\int_0^{+\infty}\frac{du}{\left(\frac{y}{\sqrt{y^2-1}}\right)^2+u^2}$$

$$=\frac{2y}{y^2-1}\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{y^2-1}}{y}u\right)\Bigg|_{u=0}^{u=+\infty}=\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$\therefore\quad I(y)=\pi\ln(y+\sqrt{y^2-1})+C$$

要确定常数 C 稍困难一些，可这样做：

$$C=\int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2x)dx-\pi\ln(y+\sqrt{y^2-1})$$

$$=\int_0^{\pi/2}\left[\ln y^2+\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{y^2}\right)\right]dx-\pi\ln(y+\sqrt{y^2-1})$$

$$=\int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{y^2}\right)dx-\pi\ln\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{y}$$

令 $y\to1^+$，仍不能确定 C

改令 $y\to+\infty$， $\pi\ln\frac{y+\sqrt{y^2+1}}{y}\to\pi\ln2$

又 $0<1-\frac{1}{y^2}\leqslant1-\frac{\sin^2x}{y^2}\leqslant1$

$$\therefore\quad \ln\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\leqslant\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{y^2}\right)\leqslant0$$

$$\therefore\quad \left|\int_0^{\pi/2}\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{y^2}\right)dx\right|\leqslant\int_0^{\pi/2}\left|\ln\left(1-\frac{\sin^2x}{y^2}\right)\right|dx$$

$$\leqslant\int_0^{\pi/2}\left|\ln\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\right|dx=\frac{\pi}{2}\left|\ln\left(1-\frac{1}{y^2}\right)\right|\to0\quad(y\to+\infty)$$

$$\therefore\quad C=-\pi\ln2$$

$$\therefore\quad \int_0^{\pi/2}\ln(y^2-\sin^2x)dx=\pi\ln\frac{y+\sqrt{y^2-1}}{2}$$

练习 1 计算 $I(y)=\int_0^{\pi/2}\frac{\operatorname{arctg}(y\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$

答：$I(y)=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y\cdot\ln(1+|y|)\quad(-\infty<y<+\infty)$

练习 2 计算 $I(y)=\int_0^{\pi/2}\ln\frac{1+y\cos x}{1-y\cos x}\frac{dx}{\cos x}\,(|y|<1)$

答：$I(y)=\pi\arcsin y\qquad(|y|<1)$

上面讨论的含参量常义积分，其积分限不依赖于参量。课本上还证明了积分限也依赖于参量的常义积分 $F(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}f(x,y)dx$ 的可微性定理：在一定条件下（想想是什么条件），$F(y)$ 可微，且

$$F'(y)=\int_{a(y)}^{b(y)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+f(b(y),y)b'(y)-$$
$$-f(a(y),y)a'(y)\qquad *$$

其实，只要把 $F(y)$ 看作复合函数：

$$F(y)=\Phi(y,u,v)=\int_u^v f(x,y)dx$$

其中 $u=a(y)$，$v=b(y)$

就可以根据复合函数的连续性与可微性定理讨论 $F(y)$ 的连续性与可微性，并导出公式（*）. 为了熟悉公式（*），再举几个例及练习.

例 3 设 $F(y)=\int_a^b f(x)|y-x|dx\qquad(a<b)$

其中 f 是可微函数. 求 $F''(x)$

解 如能去掉积分号内的绝对值符号，就可利用可微性定理.

当 $y<a$，$F()y=\int_a^b f(x)(x-y)dx$

$$F'(y)=-\int_a^b f(x)dx \qquad \therefore \quad F''(y)=0$$

当 $y>b$, $F(y)=\int_a^b f(x)(y-x)dx$

$$F'(y)=\int_a^b f(x)dx \qquad \therefore \quad F''(y)=0$$

当 $a\leqslant y\leqslant b$ $F(y)=\int_a^y f(x)(y-x)dx+\int_y^b f(x)(x-y)dx$

$$\therefore \quad F'(y)=f(y)(y-y)+\int_a^y f(x)dx+f(y)(y-y)$$
$$+\int_y^b[-f(x)]dx$$

$$\therefore \quad F''(y)=f(y)+f(y)=2f(y)$$

$$\therefore \quad F''(y)=\begin{cases}2f(y), & 当 \quad y\in[a,b]\\ 0\quad, & 当 \quad y\notin[a,b]\end{cases}$$

注意这里求出的 $F''(a)=2f(a)$, $F''(b)=2f(b)$ 分别为右导数及左导数。

练习 3 设 f 在 $[a,b]$ 连续，试证

$y(x)=\frac{1}{k}\int_0^x f(t)\sin k(x-t)dt$ 满足方程

$$y''+k^2y=f(x)$$

练习 4 设 $u(x)=\int_0^1 k(x,y)v(y)dy$

其中 $k(x,y)=\begin{cases}x(1-y) & (当\ x\leqslant y)\\ y(1-x) & (当\ x>y)\end{cases}$ 及 $v(y)$

均为连续函数，求证 u 满足方程

$$u''(x)=-v(x) \qquad (0\leqslant x\leqslant 1).$$

§3 含参变量广义积分一致收敛的判定

对含参量广义积分进行分析运算（在积分号下取极限、求导，交换积分顺序）时，常常需要一致收敛作为条件。因此在习作课上要通过例题、练习使学生掌握一致收敛的判别方法。这里所举的例题多属于无穷限的广义积分。

首先复习一个含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在 $\mathscr{Y}$ 上一致收敛的定义，并推导一个简单命题。

设 $\mathscr{Y}$ 是一实数集合（常常是某一区间）。如果积分 $I(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在每点 $y\in\mathscr{Y}$ 收敛，并且 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,A_0=A_0(\varepsilon)>a$，使不等式

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|=\left|\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx-\int_a^A f(x,y)dx\right|<\varepsilon \tag{*}$$

当 $A>A_0$ 时，对一切 $y\in\mathscr{Y}$ 都成立，则称 $I(y)$ 在 $\mathscr{Y}$ 上一致收敛。

因为（*）式对一切 $y\in\mathscr{Y}$ 都成立，所以当 $A>A_0$ 时

$$\sup_{y\in\mathscr{Y}}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|\leqslant\varepsilon$$

因此
$$\lim_{A\to+\infty}\sup_{y\in\mathscr{Y}}\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)dx\right|=0 \tag{**}$$

反之，若（＊＊）成立，容易推出$I(y)$在$\mathscr{Y}$上一致收敛。这样我们就证明了以下命题：

$$I(y)\text{ 在 }\mathscr{Y}\text{ 一致收敛}\Leftrightarrow \lim_{A\to+\infty}\sup_{y\in\mathscr{Y}}\left|\int_A^{+\infty}f(x,y)dx\right|=0$$

要判定积分 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在$\mathscr{Y}$上一致收敛（其中积分$I(y)$无瑕点），除了根据定义和以上简单命题外，还有以下几种方法：

1．根据一致收敛的Caucly准则。

2．根据某些具体的判别法，常用的有：

（1）维氏判别法（优函数法）

设$f(x,y)$关于x在任何有限区间$[a,A]$可积，且有函数$F(x)$满足：

$$|f(x,y)|\leqslant F(x)\quad（当\ x\geqslant X\geqslant a,\ y\in\mathscr{Y}）$$

如果 $\int_a^{+\infty}F(x)dx$ 收敛，那么积分 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在$\mathscr{Y}$上一致收敛。（其中$F(x)$叫优函数）

（2）阿贝尔判别法

如果

(i) $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 在$\mathscr{Y}$上一致收敛

(ii) $g(x,y)$对x单调，且关于$y\in\mathscr{Y}$一致有界，即存在正数L，使

$$|g(x,y)|\leqslant L\qquad 当\ x\geqslant a,\ y\in\mathscr{Y}$$

那么积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\ g(x,y)dx$ 在$\mathscr{Y}$一致收敛。

（3）狄里克莱判别法

如果

(i) 积分 $J(A,y)=\int_a^A f(x,y)dx$ 在 $A\geqslant a$，$y\in\mathscr{Y}$ 上有界，即存在正数 k，使

$$\left|\int_a^A f(x,y)\,dx\right|\leqslant k \qquad (\text{当 } A\geqslant a,\ y\in\mathscr{Y})$$

(ii) $g(x,y)$ 对 x 单调，且当 $x\to+\infty$，$g(x,y)$ 关于 $y\in\mathscr{Y}$ 一致趋于零，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists A_0=A_0(\varepsilon)$，当 $x\geqslant A_0$ 时，不等式

$$|g(x,y)|<\varepsilon \qquad \text{对一切 } y\in\mathscr{Y} \text{ 成立.}$$

那么积分 $I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)g(x,y)dx$ 在 $\mathscr{Y}$ 上一致收敛。

以上各判别法的条件要记清楚。使用时要注意：维氏判别法只能用于绝对收敛的积分，关键是找出优函数；阿贝尔和狄里克莱判别法常用于条件收敛的积分，验证条件时要特别注意条件中的一致性。

例 1 证明下列积分在指定的区间上一致收敛。

(i) $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 在 $[t_0,+\infty)$，其中 $t_0>0$

(ii) $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx}x\cos x^2dx$ 在 $[t_0,+\infty)$，其中 $t_0>0$

(iii) $I(t)=\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\,e^{-tx^2}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$，其中 $0<\alpha<\beta$

(iv) $I(y)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos xy}{(1+x^2)(1+x^2y^2)}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$，

(v) $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dx$ 在 $[a,b]$，其中 $a<b$。

解 证明积分一致收敛时，通常总是先看看是否有优函数。这里的 (i) － (v) 都有优函数，因而都是一致收敛的。

(i) 当 $0\leqslant x<+\infty$，$0<t_0\leqslant t<+\infty$ 时，

$$0<e^{-tx^2}\leqslant e^{-t_0x^2}$$

又 $\int_0^{+\infty}e^{-t_0x^2}dx$ 收敛， $\therefore\ I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$

在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(ii) 优函数是 xe^{-t_0x}

(iii) 优函数是 $\sqrt{\beta}\,e^{-\alpha x^2}$

(iv) 优函数是 $\dfrac{1}{1+x^2}$

(v) 当 $0\leqslant x<+\infty$，$a\leqslant y\leqslant b$

$$x-b\leqslant x-y\leqslant x-a$$

$\therefore$ 当 $x\geqslant b$，$0<x-b\leqslant x-y\leqslant x-a$

$\therefore$ $(x-y)^2\geqslant(x-b)^2$

$\therefore$ $e^{-(x-y)^2}\leqslant e^{-(x-b)^2}$ 当 $x\geqslant b$，$a\leqslant y\leqslant b$

而 $\int_0^{+\infty}e^{-(x-b)^2}dx$ 收敛 $\therefore\ I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dx$

在 $[a,b]$ 一致收敛。

例 2 证明积分 $I(y)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}dx$ 在 $[y_0,+\infty)$ 在一致收敛．其中 y_0 是一个正数．

证 对每个 $y\geqslant y_0>0$，$I(y)$ 条件收敛，因此不存在优函数。现在考虑用阿贝尔或狄里克莱判别法试探．由于

(i) $\left|\int_1^A\cos xydx\right|=\left|\dfrac{\sin Ay-\sin y}{y}\right|\leqslant\dfrac{2}{y_0}$

当 $y\geqslant y_0>0$

(ii) 对每个确定的 $y\geqslant y_0$，$\frac{1}{\sqrt{x+y}}$对x单调减，且当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{\sqrt{x+y}}$关于$y\geqslant y_0$一致趋于零（这是因为当$y\geqslant y_0>0$时，$\frac{1}{\sqrt{x+y}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}\to 0$，所以$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，当$x>X$时，不等式$\frac{1}{\sqrt{x+y}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$对一切$y\geqslant y_0>0$成立）

根据狄里克莱判别法知，积分$\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}dx$在$[y_0, +\infty)$上一致收敛。

例 3 证明 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

证法 1 由于

(i) $\left|\int_0^A x\sin x^2 dx\right|=\frac{1}{2}|1-\cos A^2|\leqslant 1$

(ii) 对每个 $y>0$，$g(x)=\frac{1}{x(1+x^y)}$ 在 $(0,+\infty)$ 上对x单调减（$\because$ 当x增时，x^y也增）

且 $0<\frac{1}{x(1+x^y)}\leqslant\frac{1}{x}\to 0$ $\therefore$ 当$x\to+\infty$时，$\frac{1}{x(1+x^y)}$关于$y>0$一致趋于零。根据狄里克莱判别法知积分 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}dx$ 在$(0,+\infty)$上一致收敛。

证法 2 由于

(i) $\int_0^{+\infty}\sin x^2dx \xlongequal{u=x^2} \int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du$ 收敛

(ii) 对每个 $y>0$，$\frac{1}{1+x^y}$ 对 x 单调减，

且 $0<\frac{1}{1+x^y}\leqslant 1 \quad (0\leqslant x<+\infty,\ 0<y<+\infty)$

根据阿贝尔判别法可知 $I(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{1+x^y}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。

练习 证明下列积分在指定的区间一致收敛。

(i) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$ 在 $[a,b]$，其中 $0<a<b$；

(ii) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}e^{-\alpha x}dx$ 在 $[a,b]$，其中 $0<a<b$；

(iii) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\sin x dx$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$，其中 $\alpha_0>0$；

(iv) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{1+x^2}dx$ 在 $[\alpha_0,+\infty)$，其中 $\alpha_0>0$；

(v) $I(\alpha)=\int_1^{+\infty}e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 在 $[0,+\infty)$。

以上证明一致收敛的方法，应当要求学生很好地掌握。一要注意观察，选择什么方法较好；二要仔仔细细地验证条件，一点也不能马虎。

§4 含参变量广义积分的非一致收敛

从应用的角度来说，非一致收敛并不重要。不过，考察

一些非一致收敛的例子，反过来对一致收敛可能理解得更好一些。要求学生大体知道判定非一致收敛有哪些办法，并能够运用。

先看几个例子，其中有些与§3例1有联系。

例1 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛吗？

分析 在§3中已经证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛，其中 t_0 是任意正数，但不能由此推出 $\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛*。事实上，$\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛。证明如下：

当 $t>0$，$\int_A^{+\infty}e^{-tx^2}dx \xlongequal{u=\sqrt{t}\,x} \frac{1}{\sqrt{t}}\int_{A\sqrt{t}}^{+\infty}e^{-u^2}du$

$\exists\,\varepsilon_0=\int_1^{+\infty}e^{-u^2}du>0$，对任何 A（不防设 $A>1$），有 $t^*=\frac{1}{\sqrt{A^2}}>0$，使 $\int_A^{+\infty}e^{-t^*x^2}dx=A\int_1^{+\infty}e^{-u^2}du>\varepsilon_0$ 根据定义，$I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛。

在例1中，$I(0)=\int_0^{+\infty}dx$ 发散。这并非巧合。事实上可以证明以下命题（课本中有类似的习题）。

若 $f(x,y)$ 在 $[0,+\infty)\times(c,+\infty)$ 连续，对每个

---

* 由 $f(x)$ 在 $[t_0,+\infty)$ 连续（其中 t_0 可取任何正数）可以推出 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续。与此类此，有的学生便以为可以由 $I(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)dx$ 在任何 $[t_0,+\infty)$ 一致收敛 $(t_0>0)$ 推出 $\int_a^{+\infty}f(x,t)\cdot dx$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛。在学习数学的过程中，这种不加思索的形式类比推理常常会导致错误的结论。

$y\in(c,+\infty)$，$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 收敛，但当 $y=c$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}f(x,c)dx$ 发散，则 $I(y)$ 在 $(c,+\infty)$ 上非一致收敛。

由这命题可知 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛。因此，它有助于鉴别一致收敛与非一致收敛。

例 2 $I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-tx^2}x\cos x^2dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛吗？

（在 § 3 也证出 $I(t)$ 在任何 $[t_0,+\infty)$ 一致收敛．其中 $t_0>0$）

解： 考察 $I(0)=\int_0^{+\infty}x\cos x^2dx$

$\because$ $\int_0^A x\cos x^2dx=\frac{1}{2}\sin A^2$ 当 $A\to+\infty$ 时，极限不存在，$\therefore$ $I(0)$ 发散，因此 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛。

由此看出，考察一个广义积分在开区间 I 内是否一致收敛，不妨先看看它在区间的端点是否收敛。如果在 I 的某一端点发散，它在 I 内必定非一致收敛。

例 3 证明 积分 $I(a)=\int_0^{+\infty}\sqrt{a}\,e^{-ax^2}dx$ 在任何 $[a_0,+\infty)$ 一致收敛（其中 $a_0>0$）问 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 一致收敛吗？

证 当 $A>0$

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{a}\,e^{-ax^2}dx \xlongequal{u=\sqrt{a}\,x} \int_{A\sqrt{a}}^{+\infty}e^{-u^2}du \leqslant \int_{A\sqrt{a_0}}^{+\infty}e^{-u^2}du$$

（当 $a\geqslant a_0$）

$$\therefore\quad \sup_{a\geqslant a_0}\left|\int_A^{+\infty}\sqrt{a}\,e^{-ax^2}dx\right| \leqslant \int_{A\sqrt{a_0}}^{+\infty}e^{-u^2}du \to 0$$

（当 $A\to+\infty$）

$\therefore$ $I(a)$ 在 $[a_0,+\infty)$ 一致收敛。

又 $I(0)=\int_0^{+\infty}0dx=0$ 收敛，但不能由此推出 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致敛。事实上，$I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 非一致收敛，证明如下：

$\exists\varepsilon_0=\int_1^{+\infty}e^{-u^2}du>0$，对任何 $A>0$，可取 $a^*=\dfrac{1}{A^2}>0$ 使：

$$\int_A^{+\infty}\sqrt{a^*}\,e^{-a^*x^2}dx=\int_{A\sqrt{a^*}}^{+\infty}e^{-u^2}du=\varepsilon_0$$

$\therefore$ $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛。

观察例 3 还可以发现一个有趣的事情。在积分中作变换 $u=\sqrt{a}\,x$，则得：

$$I(a)=\int_0^{+\infty}\sqrt{a}\,e^{-ax^2}dx=\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du=c\quad(0<a<+\infty)$$

因此 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是一个常数，即对任何 $a>0$，积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{a}\,e^{-ax^2}dx$ 收敛于同一个数值 c。有的同学认为，这就说明 $I(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛。但我们已经证明 $I(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛，试分析一下这里出现的矛盾。

另外，根据含参变量广义积分的连续性定理知道，若积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 在区间 I 上有间断点，也能断定 $I(y)$ 在 I 上非一致收敛。不过这种判定方法用处不大。

练习 1 讨论以下各函数在指定的区间是否一致收敛

（1） $I(t)=\int_0^{+\infty} x\ln x e^{-t\sqrt{x}}dx$ 在（i）$[t_0,+\infty)$，其中 $t_0>0$，（ii）$(0,+\infty)$；

（2） $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x}dx$ 在（i）$[\alpha_0,+\infty)$，其中 $\alpha_0>0$，（ii）$(0,+\infty)$；

（3） $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-(x-y)^2}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$；

（4） $I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-y^2(1+x^2)}\sin y dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$.

练习 2 设 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 对每个 $y\in\mathscr{Y}$ 收敛，如果对任意 $A>a$，$\lim\limits_{y\to y_0}\int_A^{+\infty}f(x,y)dx=l\neq 0$（其中 y_0 是 $\mathscr{Y}$ 的极限点；l 是与 A 无关的非零常数），则 $\int_a^{+\infty}f(x,y)dx$ 关于 y 在 $\mathscr{Y}$ 上不一致收敛。

§5 含参变量广义积分的计算

本节将通过例题讲解及练习使学生掌握含参量广义积分的计算方法。要注意验证必需的条件以保证运算合理。

课本上计算了两个含参数积分：

$$I(y)=\int_0^{+\infty}e^{-a^2x^2}\cos 2yx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-y^2/a^2}\qquad(a>0)$$

$$I(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}-\text{arctg}a\qquad(a\geqslant 0)$$

由后一个积分还可推算出重要的狄里克莱积分

$$I(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}dx=\begin{cases}\pi/2, & 当\ \beta>0,\\ 0, & 当\ \beta=0,\\ -\pi/2, & 当\ \beta<0.\end{cases}$$

使用的方法是先在积分号下求导，计算出 $I'(y)$（或得到关于 $I(y)$ 的微分方程），再对 $I'(y)$ 积分（或者解关于 $I(y)$ 的微分方程），进一步确定积分常数，从而求出 $I(y)$。这和计算含参量常义积分时的程序相同，只不过现在验证的条件更复杂。

例1 计算 $J(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x}e^{-x}dx$

解 当 $x\to 0$，$\frac{1-\cos ax}{x}e^{-x}=\frac{2\sin^2\frac{ax}{2}}{x}e^{-x}\to 0$

∴ $x=0$ 并非瑕点，被积函数可看作连续函数。显见积分收敛。

因为直接积分困难，所以转想先求导再积分的办法来试探。由于

(i) $f(x,a)=\begin{cases}\frac{1-\cos ax}{x}e^{-x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$

在 $0\leqslant x<+\infty$，$-\infty<a<+\infty$ 连续；

(ii) $J(a)=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos ax}{x}e^{-x}dx$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛；

(iii) $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}f(x,a)dx=\int_0^{+\infty}\sin ax e^{-x}dx$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛（e^{-x} 为优函数）；

因而对 $J(a)$ 可在积分号下求导（当 $-\infty<a<+\infty$），

$\therefore\quad J'(a)=\int_0^{+\infty}\sin ax e^{-x}dx=\frac{a}{a^2+1}$,

$\therefore\quad J(a)=\int\frac{ada}{a^2+1}=\frac{1}{2}\ln(a^2+1)+C$.

由 $J(0)=0$ 知 $C=-\frac{1}{2}\ln 1=0$,

$\therefore\quad J(a)=\frac{1}{2}\ln(1+a^2)$,

例2 计算 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx\ (a>0)$

分析 试图采取例 1 的方法，先证明对 $I(a)$ 可在积分号下求导（$a>0$）.

容易验证 $f(x,a)=\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$，$0<a<+\infty$

连续，$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx$ 在 $0<a<+\infty$ 收敛.

但要验证 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2ax^2}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}dx$ 在

$(0,+\infty)$ 上一致收敛就有问题了. 事实上 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}dx$

在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛（同学们可自己证明）. 不过我们的目的是要证明对任何 $a>0$，对 $I(a)$ 可在积分号下求导. 而任何函数 a 可以包含在一个闭区间 $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$ 内，因此我们只要证明在任何 $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$ 内，可

对 I(a) 在积分号下求导即可。这样，关于$\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}dx$，只需验证它在任何 $[\alpha,\beta]\subset(0,+\infty)$ 内一致收敛就够了*，而这一点不难做到。现在把解法仔细写在下面。

解 （一）首先验证对 $I(a)$ 可在积分号下求导需要满足的条件：

(i) $f(x,a)=\dfrac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$，$\alpha\leqslant a\leqslant\beta$ 连续（其中 $0<\alpha<\beta$）

(ii) $I(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 收敛

这是因为对每个确定的 $a\in[\alpha,\beta]$

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}\frac{\ln(1+a^2x^2)}{\sqrt{x}}=0$$

(iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}dx=\int_0^{+\infty}\frac{2ax^2}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}dx$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上一致收敛。

这是因为当 $0\leqslant x<+\infty$，$0<\alpha\leqslant a\leqslant\beta$ 时，

$$\frac{2ax^2}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}\leqslant\frac{2\beta x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}<\frac{2\beta}{1+\alpha^2x^2}$$

$\dfrac{2\beta}{1+\alpha^2x^2}$ 可取作优函数。

因此当 $a\in[\alpha,\beta]$，可在积分号下求导，而 α，β 是满足 $0<\alpha<\beta$ 的任何正数，∴ 当 $a>0$，可在积分号下求导。

（二）$I'(a)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{2ax^2}{(1+x^2)(1+a^2x^2)}dx$

---

*）此时我们说$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 内闭一致收敛。

$$=\frac{2a}{a^2-1}\left(\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}-\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+a^2x^2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{a+1} \qquad (a>0,\ a\neq 1)$$

$$I'(1)=2\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

$$=-\int_0^{+\infty}xd\left(\frac{1}{1+x^2}\right)=-\frac{x}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}$$

综合以上两式得：

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+1} \qquad (a>0)$$

积分得 $I(a)=\pi\ln(1+a)+C$

（三） 为了确定常数 C，在上式两端令 $a\to 0^+$，得 $I(0)=C$ 显见 $I(0)=0$ ∴ $C=0$

∴ $I(a)=\pi\ln(1+a^2)$

这里又用到了积分 $I(a)$ 在 $a=0$ 右连续，事实上

$f(x,a)=\dfrac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$ $0\leqslant a\leqslant 1$ 连续，且

由于 $0\leqslant\dfrac{\ln(1+a^2x^2)}{1+x^2}<\dfrac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}$ （优函数）

∴ $I(a)=\int_0^{+\infty}f(x,a)dx$ 在 $[0,1]$ 一致收敛，因此 $I(a)$ 在 $[0,1]$ 连续.

例3 证明函数 $F(a)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{1+(x+a)^2}dx$ $-\infty<a<+\infty$ 可在积分号下求导。

证 由于

(i) $f(x,\alpha)=\dfrac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$，$a\leqslant\alpha\leqslant b$ 连续（此处 $[a, b]$ 是任何闭区间）；

(ii) $F(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{1+(x+\alpha)^2}dx$ 在 $[a, b]$ 收敛；

(iii) $\int_0^{+\infty}\dfrac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx=-\int_0^{+\infty}\dfrac{2\sin x\cdot(x+\alpha)}{[1+(x+\alpha)^2]^2}dx$

在 $[a, b]$ 上一致收敛.

这是因为，当 x 充分大，可使 $x+\alpha\geqslant x+a>\dfrac{x}{2}$，又设 $c=\max\{|a|,|b|\}$，则当 x 充分大，$a\leqslant\alpha\leqslant b$，有

$$\left|\frac{2\sin x\cdot(x+\alpha)}{[1+(x+\alpha)^2]^2}\right|\leqslant\frac{2(x+c)}{\left(1+\dfrac{x^2}{4}\right)^2}\quad\text{（优函数）}$$

因此，可以对 $F(\alpha)$ 在积分号下求导 $(a\leqslant\alpha\leqslant b)$. 因为 $[a, b]$ 是任意闭区间，所以对 $F(\alpha)$ 可在积分号下求导 $(-\infty<\alpha<+\infty)$

练习 1 计算 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)^2}dx\ (\alpha\geqslant0)$

练习 2 证明 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin2xy\,dx=e^{-y^2}\int_0^y e^{t^2}dt$

还可以用交换积分顺序的办法来计算积分。如计算

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{\beta x}}{x}dx\qquad(0<\alpha<\beta)$$

其中被积函数本身又可写成积分形式：

$$\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}=\int_\alpha^\beta e^{-yx}dy$$

而 $f(x,y)=e^{-yx}$ 在 $0\leqslant x<+\infty$，$\alpha\leqslant y\leqslant\beta$ 连续又 $\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx$ 在 $[\alpha,\ \beta]$ 上一致收敛（$e^{-\alpha x}$ 是优函数）因此根据积分换序定理有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\int_0^{+\infty}dx\int_\alpha^\beta e^{-yx}dy$$

$$=\int_\alpha^\beta dy\int_0^{+\infty}e^{-yx}dx=\int_\alpha^\beta\left[\left(\frac{e^{-yx}}{-y}\right)\Big|_{x=0}^{x=+\infty}\right]dy$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{dy}{y}=\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

最后举一个例题，计算中需要交换两个无穷限积分的次序。

例 4 计算普阿松积分 $I=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$

解：作变换 $x=ut$ （$u>0$，t 为新积分变量）

则得 $$I=\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}udt=u\int_0^{+\infty}e^{-u^2t^2}dt$$

$$\therefore\quad I^2=\int_0^{+\infty}Ie^{-u^2}du=\int_0^{+\infty}du\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

$$=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}ue^{-u^2(1+t^2)}du$$

令 $v=u^2(1+t^2)$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\cdot\int_0^{+\infty}e^{-v}dv=\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore\quad I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

我们还需要证明计算中两个无穷限积分交换次序是合理的，即

$$\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

其中等式右端的积分已经算出。

由于 $\int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt$

$$= \lim_{\substack{A\to+\infty \\ C\to 0}} \int_C^A du \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

$$= \lim_{\substack{A\to+\infty \\ C\to 0}} \int_0^{+\infty} dt \int_C^A ue^{-u^2(1+t^2)}du$$

因此只需证明当 $A\to+\infty$，$C\to 0$ 时

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du - \int_0^{+\infty} dt \int_C^A ue^{-u^2(1+t^2)}du$$

$$= \int_0^{+\infty} dt \left[\int_0^C + \int_A^{+\infty}\right] ue^{-u^2(1+t^2)}du$$

趋于零即可。事实上

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^C ue^{-u^2(1+t^2)}du = \int_0^C du \int_0^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}dt$$

$$= \int_0^C \mathrm{I}e^{-u^2}du = \mathrm{I}\int_0^C e^{-u^2}du \to 0 \qquad (\text{当} C\to 0)$$

且 $\int_0^{+\infty} dt \int_A^{+\infty} ue^{-u^2(1+t^2)}du$ 　　　令 $u^2(1+t^2)=v$

$$= \int_0^{+\infty} \left\{ \int_{A^2(1+t^2)}^{+\infty} \frac{e^{-v}}{2(1+t^2)} dv \right\} dt$$

$$\leqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2(1+t^2)} \cdot \int_{A^2}^{+\infty} e^{-v}dv \to 0 \qquad (A\to+\infty)$$

因此积分换序是合理的。至于上述证明中有穷限积分与无穷限积分的换序的合理性也不难验证。

有兴趣的读者可以用类似方法计算拉普拉斯积分

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{a^2+x^2}dx \qquad (a,\ \beta>0)$$

提示：1. 利用 $\frac{1}{a^2+x^2}=\int_0^{+\infty}e^{-(a^2+x^2)u}du$；

2. 证明两个无穷限积分可以交换次序；

3. 利用习题中的结果

$$\int_0^{+\infty}e^{-y^2-\frac{c}{y^2}}dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}.$$

§6 含参变量的瑕积分

考虑含参量积分 $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ （$y\in\mathscr{Y}$）若对$\mathscr{Y}$中每个 y 值（或$\mathscr{Y}$中一部分值），$x=b$ 是 $\int_a^b f(x,y)dx$的（唯一）瑕点，则称 $I(y)$ 为含参量的瑕积分。我们只讨论这种有唯一瑕点的情形。

根据瑕积分的定义，若 $x=b$ 是 $I(y_1)$ （$y_1\in\mathscr{Y}$）的瑕点，则 $f(x,y_1)$ 在 $x=b$ 左侧任何小邻域内都无界。即 $\forall K>0$，$\forall\eta>0$，$\exists x_1\in[b-\eta,b)$，使 $|f(x_1,y_1)|>K$。

含参量的瑕积分也很有用，其中重要的有 β 函数、Γ 函数。含参量的瑕积分与含参量的无穷限积分在理论上极为类似，因此课本上没有详细讨论含参量的瑕积分。目前我们已经对含参量的无穷限积分理论讨论得很详细，因此对比着这一理论，由同学们自已将含参量瑕积分的有关概念定理加以叙述，论证，可能会有益处的。下面我们仅列出提纲，细节由同学完成。然后再安排几个例题、习题。

1. 叙述 $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 在 $\mathscr{Y}$ 上收敛的定义。

叙述 $I(y)$ 在 $\mathscr{Y}$ 一致收敛的定义及 Cauchy 准则。

2. 叙述一致收敛的优函数判别法

3. 叙述关于 $I(y)$ 的连续性、积分号下求导及积分换序诸定理。

4. 叙述关于 $I(y)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ 一致收敛的阿贝尔及狄里克莱判别法。

在以上命题中，选择三四个加以证明。

下面安排几个例题及练习

例 1 证明积分 $I(y)=\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}dx$

(i) 在 $(-\infty, y_0]$（其中 $y_0<2$）一致收敛；

(ii) 在 $(-\infty, 2)$ 在一致收敛。

证 这里对某些参数值，$x=0$ 是瑕点。

(i) 当 $0<x\leqslant 1$，$-\infty<y\leqslant y_0$ （$y_0<2$）

$$\left|\frac{\sin x}{x^y}\right|\leqslant\frac{x}{x^{y_0}}=\frac{1}{x^{y_0-1}}$$

$\because$ $y_0-1<1$ $\therefore$ $\frac{1}{x^{y_0-1}}$ 可作为优函数。根据含参量瑕积分一致收敛的优函数判别法知 $I(y)=\int_0^1\frac{\sin x}{x^y}dx$ 在 $(-\infty, y_0]$ 一致收敛（其中 $y_0<2$）.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\therefore$ $\exists\eta_0>0$，当 $0<x<\eta_0$ 时 $\frac{\sin x}{x}\geqslant\frac{1}{2}$.

对任何 $\eta\in(0,\eta_0)$

$$\int_0^\eta \frac{\sin x}{x^y}dx=\int_0^\eta \frac{1}{x^{y-1}}\frac{\sin x}{x}dx\geqslant\frac{1}{2}\int_0^\eta\frac{1}{x^{y-1}}dx$$

$$=\frac{1}{2(2-y)}\eta^{2-y}\to+\infty\ (\text{当 } y\to 2-0)$$

因此，$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^y}dx$ 在 (0, 2) 不一致收敛。

例2 证明 $\varphi(p)=\int_0^1 x^{p-1}\ln^k x dx$ 在 $p>0$ 连续

（此处 k 为某个正整数）

证

(i) 当 $p>1$，$\because\ \lim\limits_{x\to 0+}x^{p-1}\ln^k x=0$，而 $x^{p-1}\ln^k x$ 在 $0<x\leqslant 1$ 及 $p>1$ 连续，故 $\varphi(p)$ 为常义积分而且在 $p>1$ 连续。

(ii) 当 $0<p\leqslant 1$，$\varphi(p)$ 有瑕点 $x=0$。

我们先粗略地分析一下。如果能证明 $\varphi(p)$ 在 $0<p\leqslant 1$ 内一致收敛，那么由含参量瑕积分的连续性定理可知 $\varphi(p)$ 在 $0<p\leqslant 1$ 连续。可惜事实并不如此。这因为从 $\varphi(0)=$
$=\int_0^1\frac{\ln^k x}{x}dx$ 发散即能断定 $\varphi(p)$ 在 $0<p\leqslant 1$ 不一致收敛。因此我们只好仿照§5例2与例3所用的办法，证明 $\varphi(p)$ 在任何 $[\alpha,\beta]\subset(0,1]$ 内一致收敛。

由于当 $0<x\leqslant 1$，$0<\alpha\leqslant p\leqslant\beta<1$ 时，

$|x^{p-1}\ln^k x|\leqslant x^{\alpha-1}|\ln^k x|$

及 $\int_0^1 x^{\alpha-1}\ln^k x\,dx$ 收敛

$\therefore$ $\varphi(p)$ 在 $[\alpha,\beta]\subset(0,1]$ 上一致收敛，因而连续。

而 $[\alpha, \beta]$ 为 $(0,1]$ 内任何闭区间，所以 $\varphi(p)$ 在 $(0,1]$ 连续。

例3 计算 $I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx \ (|\alpha|\leqslant 1)$

解 $x=1$ 是瑕点。由于

(i) $f(x,\alpha)=\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$ 在 $0\leqslant x<1, |\alpha|\leqslant\delta<1$ 连续；

(ii) $\int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx$ 在 $|\alpha|\leqslant\delta<1$ 收敛；

(iii) $\int_0^1 \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}=\int_0^1 \frac{-2\alpha x^2}{\sqrt{1-x^2}\ (1-\alpha^2x^2)}dx$ 在 $|\alpha|\leqslant\delta<1$ 一致收敛。这是因为当 $0\leqslant x<1$，$|\alpha|\leqslant\delta<1$，

$$\left|\frac{-2\alpha x^2}{\sqrt{1-x^2}\ (1-\alpha^2x^2)}\right|\leqslant\frac{2\delta}{\sqrt{1-x^2}\ (1-\delta^2)}\text{（优函数）},$$

所以当 $|\alpha|\leqslant\delta<1$，对 $I(\alpha)$ 可在积分号下求导，而 $\delta<1$ 任意，所以当 $|\alpha|<1$，对 $I(\alpha)$ 可在积分号下求导：

$$I'(\alpha)=\int_0^1 \frac{-2\alpha x^2}{\sqrt{1-x^2}\ (1-\alpha^2x^2)}dx=$$

$$=-2\alpha\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\ (1-\alpha^2x^2)}dx$$

$$\overset{x=\sin t}{=\!=}-2\alpha\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2t\cos t}{\cos t(1-\alpha^2\sin^2t)}dt$$

$$=-2\alpha\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2\alpha}{1-\alpha^2\sin^2t}dt \quad \text{由此得：}$$

$I'(0)=0$，

当 $\alpha\neq 0$，$I(\alpha)=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\pi/2}\frac{-\alpha^2\sin^2t}{1-\alpha^2\sin^2t}dt$

$$=\frac{2}{\alpha}\left(\int_0^{\pi/2}dt-\int_0^{\pi/2}\frac{dt}{1-\alpha^2\sin^2 t}\right)$$

$$=\frac{\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}$$

$$\therefore\quad I'(\alpha)=\begin{cases}\dfrac{\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}} & 当|\alpha|<1,\ \alpha\neq 0\\ 0 & 当\ \alpha=0\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{\alpha\to 0}I'(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\pi(\sqrt{1-\alpha^2}-1)}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}=0=I'(0)$

$\therefore I'(\alpha)$在$\alpha=0$连续，由$I(\alpha)$之表达式可知$I(\alpha)$在$|\alpha|<1$连续。

$$\therefore\quad I(\alpha)=\pi\left(\ln\alpha-\int\frac{d\alpha}{\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}\right)$$

$$=\pi\left(\ln\alpha+\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}\right)+C$$

$$=\pi\ln(1+\sqrt{1+\alpha^2})+C$$

不难证明 $I(\alpha)$ 在 $\alpha=0$ 连续，因而令 $\alpha\to 0$，得：

$$0=I(0)=\lim_{\alpha\to 0}I(\alpha)=\pi\ln 2+C$$

$$\therefore\quad C=-\pi\ln 2$$

$$\therefore\quad I(\alpha)=\pi\ln\frac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\qquad 当\ |\alpha|<1$$

又当$|\alpha|=1$，可直接算出：

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}dx\overset{x=\sin u}{=\!=\!=}2\int_0^{\pi/2}\ln\cos u\,du=-\pi\ln 2$$

综合以上结果，得 $I(\alpha)=\pi\ln\dfrac{1+\sqrt{1-\alpha^2}}{2}\quad(|\alpha|\leqslant 1)$

最后举一个有瑕点的含参量无穷限积分的例子。

例4 设 f 在 $(0, +\infty)$ 连续，积分 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$ 在 $\lambda=a$ 及 $\lambda=b$ 收敛 $(a<b)$，证明积分 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$ 关于 λ 在 $[a, b]$ 一致收敛。

证 $I(\lambda)=\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)dx=\int_0^1 x^\lambda f(x)dx+\int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)dx$

$=I_1(\lambda)+I_2(\lambda)$

需要证明 $I_1(\lambda)$，$I_2(\lambda)$ 都在 $[a, b]$ 上一致收敛。

$$I_1(\lambda)=\int_0^1 x^{\lambda-a}\cdot x^a f(x)dx$$

由于

(i) $\int_0^1 x^a f(x)dx$ 收敛；

(ii) $x^{\lambda-a}$ 在 $[0, 1]$ 上单调且当 $0<x\leqslant 1$，$a\leqslant\lambda\leqslant b$ 时，$0<x^{\lambda-a}\leqslant 1$，根据阿贝尔判别法知 $I_1(\lambda)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛。

类似可证 $I_2(\lambda)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛，因此 $I(\lambda)$ 在 $[a, b]$ 一致收敛。

练习1 证明下列积分在指定的区间一致收敛。

(i) $I(\alpha)=\int_0^2 \frac{x^\alpha dx}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}$ $\quad(|\alpha|<1/2)$

(ii) $I(\alpha)=\int_0^1 \frac{\sin\alpha x}{\sqrt{|x-\alpha|}}dx$ $\quad(0\leqslant\alpha\leqslant 1)$

练习2 证明积分 $\int_0^1(1+x+x^2+\cdots+x^n)\sqrt{\ln\frac{1}{x}}\,dx$ 关于 n 在自然数集上一致收敛

练习 3 计算 $I(a)=\int_0^1 \frac{\ln(1-a^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx \quad (|a|\leqslant 1)$

答：$I(a)=-\pi(1-\sqrt{1-a^2}) \qquad (|a|\leqslant 1)$

第十八章　付立叶级数

付立叶级数部分在数学系本科数学分析课中所占的分量很小。分配给这部分内容的习作课至多占 4 个课时。因此在这有限的时间内应尽量使学生加深对付立叶级数的最基本的概念、理论的理解，并纠正容易出现的错误。

§1　三角级数与付立叶级数

一、三角级数是指形如

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \tag{1}$$

的级数，其中 a_0，a_n，b_n（$n=1$，2，…）均为常数。

付立叶级数是对函数说的，表示绝对可积函数的三角级数称为这个函数的付立叶级数。而且它的系数要满足欧拉——付立叶公式

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

显然付立叶级数是三角级数，但三角级数不一定是付立叶级数。

二、为了讨论付立叶级数的性质，一般在课上都要讲一

个重要引理——黎曼引理。

黎曼引理 设函数 $g(x)$ 在区间$[a, b]$上可积且绝对可积，则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)\sin px\,dx=0,$$

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b g(x)\cos px\,dx=0.$$

由此引理立刻得到可积和绝对可积函数的付立叶系数 a_n，b_n 当 $n\to\infty$ 时趋于 0。即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx=0$$

这是三角级数作为（某一函数的）付立叶级数的必要条件。

例如 $$\sum_{n=1}^{\infty}[(-1)^n\cos nx+(-1)^{n-1}\sin nx]$$

的系数 $a_n=(-1)^n$，$b_n=(-1)^{n-1}$ 都不趋于零（当$n\to\infty$时）所以，这三角级数不是任何函数的付立叶级数。

三、付立叶级数的判敛法

一个函数的付立叶级数是否一定收敛？收敛的话是否一定收敛于原来的函数？答案都是否定的。因此需讨论在什么条件下，$f(x)$ 可展成收敛于它自己的付立叶级数？课上一般讲了三个判敛法。

1. 狄尼判别法：设能取到适当的数 s，使由函数 f 及 x 点所作的函数 $\varphi(u)=f(x+u)+f(x-u)-2s$；对于某个 $h>0$，积分

$$\int_0^h\frac{|\varphi(u)|}{u}du$$

存在，那么 $f(x)$ 的付立叶级数在 x 点收敛于 s。

2.**李普希兹判别法**：如果函数 $f(x)$ 在 x 点连续，并且对于充分小的 $u>0$，满足不等式

$$|f(x\pm u)-f(x)|\leqslant Lu^{\alpha}$$

其中 $\alpha\leqslant1$ 为正常数，L 也是正常数；那么 $f(x)$ 的付立叶级数在 x 点收敛于 $f(x)$。

此判别法可推广：若对充分小的 $u>0$，有不等式

$$|f(x\pm u)-f(x\pm0)|\leqslant Lu^{\alpha}$$

L，α 为正常数，$\alpha\leqslant1$，那么 $f(x)$ 的付立叶级数在 x 点收敛于 $\dfrac{f(x+0)-f(x-0)}{2}$。

3.**狄里克莱判别法**：如果在以 x 点为中点的区间 $[x-h,\ x+h]$ 上，函数 $f(x)$ 是分段单调的，且间断点个数有限，则此函数的付立叶级数在 x 点收敛于

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}.$$

四、付立叶级数逐项可积的条件及逐项微分的条件

(1) 设 $f(x)$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 黎曼可积。则 $f(x)$ 的付立叶级数可在 $(-\pi,\ \pi)$ 逐项积分。

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\ \pi]$ 上连续。$f(\pi)=f(-\pi)$ 除在有限个点外，$f'(x)$ 分段连续，则 $f(x)$ 的付立叶级数可逐项微分。

§2　函数的付立叶级数展开

函数展成付立叶级数，其间有许多技巧，也有些容易忽

略的问题，这里有选择地列举一些情形，各用例题说明如下。

一、一般讲只有周期函数才能展成付立叶级数。这是因为付立叶级数必定收敛于周期函数，非周期函数能否展成付立叶级数呢？当我们仅仅要求在有限区间展开函数时，这一点是可以做到的。

例1 在区间 $(-\pi, \pi)$ 内将函数

$$f(x)=e^{2x}$$

展成付立叶级数。

解 在整个数轴上e^{2x}本来不是周期函数，因为现在只在$(-\pi, \pi)$上的一段我们可以将它先延拓为$(-\infty, +\infty)$上的周期函数（以2π为周期）然后展成付立叶级数。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}dx=\frac{e^{2\pi}-e^{-2\pi}}{2\pi}=\frac{\text{sh}2\pi}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\cos nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}(-1)^n\frac{4}{4+n^2}\text{sh }2\pi$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{2x}\sin nx dx$$

$$=\frac{1}{\pi}(-1)^{n+1}\frac{4}{4+n^2}\text{sh }2\pi$$

$$\therefore \quad e^{2x}=\frac{2}{\pi}\text{sh }2\pi\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(2\cos nx-n\sin nx)\right]$$

这级数在$(-\infty, +\infty)$收敛于周期函数

$$F(x)=e^{2x-4n\pi}=e^{2(x-2n\pi)} \qquad (2n-1)\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$$

$$n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

这函数当 $x\in(-\pi,\ \pi)$ 时 $F(x)=f(x)=e^{2x}$

∴ 对于 $-\pi<x<\pi$ 有

$$e^{2x}=\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}2\pi\left[\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(2\cos nx-n\sin nx)\right]$$

但是要注意在 $x=\pi$ 与 $x=-\pi$ 这级数收敛于

$$\frac{e^{2\pi}+e^{-2\pi}}{2}.$$

二、我们所考虑的多是以 2π 为周期的函数，当函数 $f(x)$ 定义在 $(-h,\ h]$ 上时，在一定条件下做一次简单变换就可以将它展成形式为：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{h}+b_n\sin\frac{n\pi x}{h}\right)$$

的付立叶级数，其中

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(x)\cos\frac{n\pi x}{h}dx \qquad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}f(x)\sin\frac{n\pi x}{h}dx \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

例 2 在区间 $(-h,\ h)$ 上将 $f(x)=e^{ax}$ 展为付立叶级数。（这是例 1 的推广）

解 由上述公式

$$a_0=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}dx=\frac{1}{ah}e^{ax}\Big|_{-h}^{h}=\frac{2}{ah}\operatorname{sh}ah$$

$$a_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}\cos\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$=\frac{(-1)^n ah}{(ah)^2+(n\pi)^2}(e^{ah}-e^{-ah})$$

$$=\frac{(-1)^n 2ah\operatorname{sh}(ah)}{(ah)^2+(n\pi)^2}$$

$$b_n=\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}e^{ax}\sin\frac{n\pi x}{h}dx$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n\pi\,\mathrm{sh}(ah)}{(ah)^2+(n\pi)^2}$$

$$n=1,\ 2,\ \cdots$$

$$\therefore\quad e^{ax}=\frac{\mathrm{sh}(ah)}{ah}+2\,\mathrm{sh}(ah)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

$$\cdot\frac{ah\cos\frac{n\pi x}{h}-n\pi\sin\frac{n\pi x}{h}}{(ah)^2+(n\pi)^2}$$

$$-h<x<h$$

三、我们知道若 $f(x)$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上是偶函数，且可展成付立叶级数，那么它的付立叶级数中只含有常数项和余弦项。同样奇函数的付立叶展开式中只含有正弦项。这样的级数分别称为余弦级数和正弦级数。进一步的问题是：给了非偶函数 $f(x)$ 能否展成余弦级数呢？如果仅仅要求在 $[0,\ \pi)$ 上展开 $f(x)$ ，那么对于在 $(-\pi,\ 0)$ 上的值 x，可以任意给函数补加定义，那么在 $(-\pi,\ \pi)$ 上就可以得到许多不同的付立叶级数。利用这点关系可以对称地将 $f(x)$ 延拓为 $(-\pi,\ \pi)$ 上的偶函数，那么它的付立叶级数就是余弦级数了。

例 3　将 $f(x)=x^2$ 展成付立叶级数，要求

(i)　只含余弦函数；

(ii)　只含正弦函数；

(iii)　在区间 $(0,\ 2\pi)$ 内展开。

解　(i)　$f(x)=x^2$ 本为偶函数，正常地展开就是余弦级数，这时 $b_n=0$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2dx=\frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nxdx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos xdx=(-1)^n\frac{4}{n^2}\quad n=1,\ 2,\ \cdots$$

于是得到

$$\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

∵ $f(x)$在 $(-\pi,\ \pi)$ 连续，

∴ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 级数收敛于 $f(x)$。

当 $x=\pm\pi$ 时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]=\pi^2=f(-\pi)=f(\pi)$$

$$\therefore\quad \frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx=x^2,\ |x|\leqslant\pi.$$

注：

当 $x=0$ 时，

得 $$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

当 $x=\pi$ 时，

得 $$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

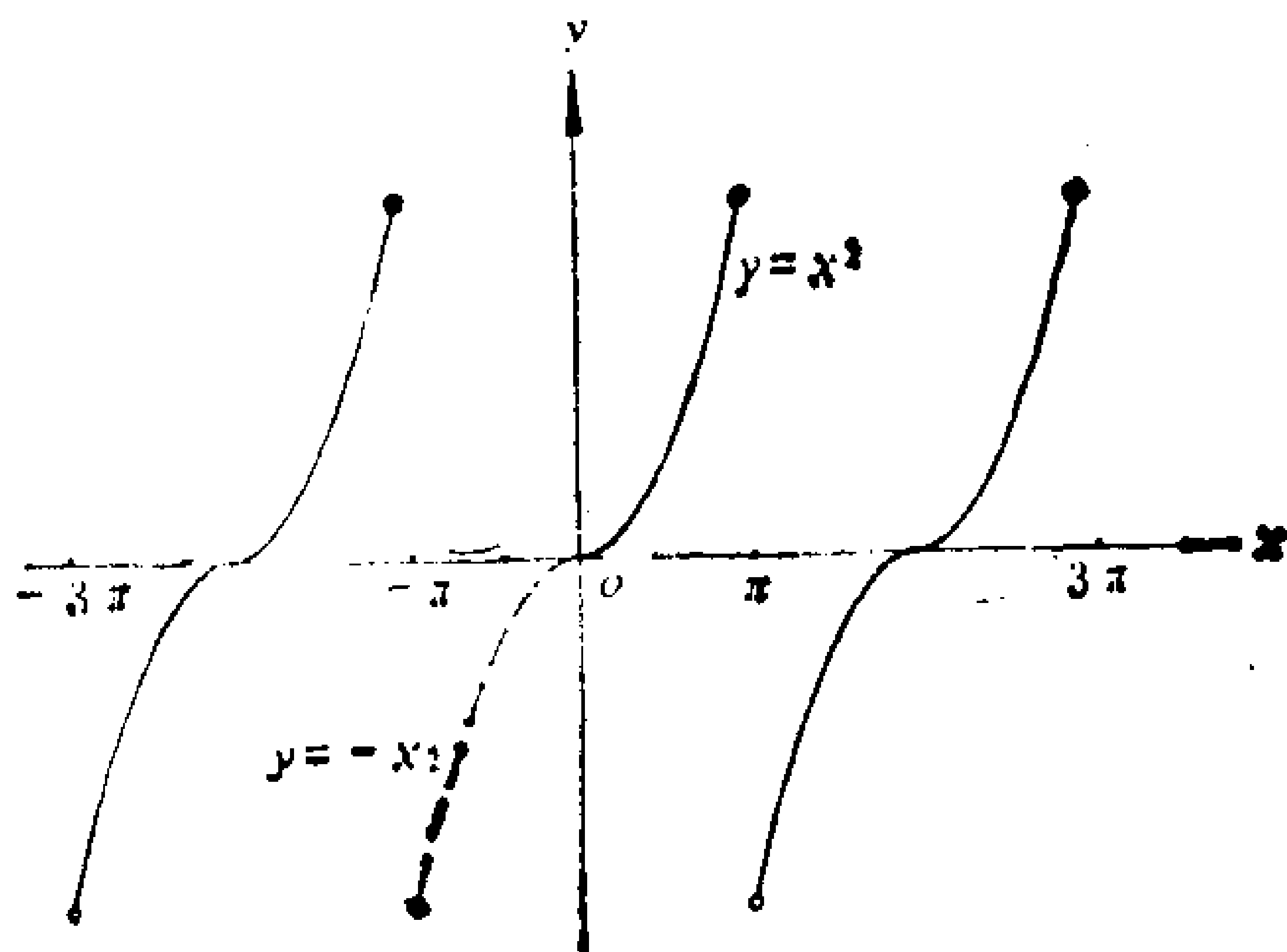


图 1

(ii) 定义

$$F(x)=\begin{cases}x^2 & [0,\ \pi)\\ -x^2 & (-\pi,\ 0)\end{cases}$$ 这是$(-\pi,\pi)$上的奇函数。

在$[0,\ \pi)$ 上 $F(x)\equiv f(x)$，如图 1，就 $F(x)$ 来说

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} - x^2 \sin nx dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \sin nx dx$$

$$= \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]$$

如此得到正弦级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1]\right\}\sin nx$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}.$$

由于 $f(x) = x^2$ 在 $(0, \pi)$ 连续，所以这级数在 $(0, \pi)$ 上收敛于 $f(x)$。当 $x = 0$，π 时，级数收敛于 0。

$$\therefore \quad 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

$$= \begin{cases} x^2 & 0 \leqslant x < \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases}.$$

(iii) 在 $(0, 2\pi)$ 上考虑 $f(x) = x^2$。如图 2 延展为周期函数。

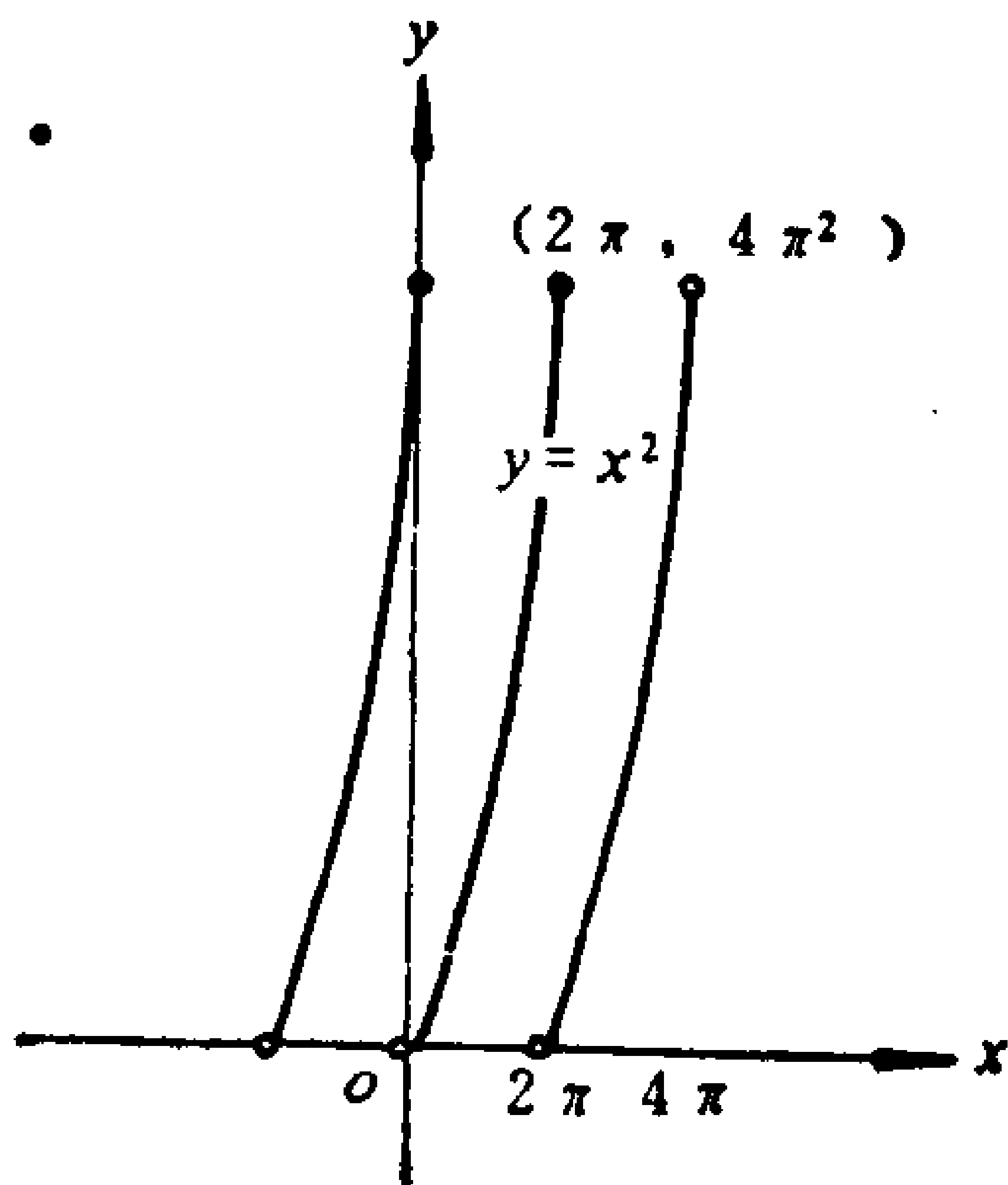


图 2

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx$$

$$= \frac{8}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx dx$$

$$=\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}x^2\sin nx dx$$

$$=-\frac{4\pi}{n}\qquad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

得到付立叶级数

$$\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

∵ $f(x)$在（0，2π）连续。

∴ 在（0，2π）上述级数收敛于x^2。

当$x=0$，2π时，级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(+0)+f(2\pi-0)]=2\pi^2.$$

$$\therefore\quad \frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}x^2 & 0<x<2\pi\\ 2\pi^2 & x=0,\ 2\pi\end{cases}$$

* $f(x)=x^2$也能在（0，2π）展为正弦（余弦）级数。可在习作课上介绍。

四、当$f(x)$的付立叶级数满足逐项可积或逐项可微条件时，可以由已知的付立叶级数求某些函数的付立叶展开式或求付立叶级数的收敛函数。

例 4 求x^3，x^4在（$-\pi$，π）内的付立叶展开式。

解 由例3知

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

两端从 0 到 x 积分得

$$\frac{1}{3}x^3=\frac{\pi^2}{3}x+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}$$

这不是三角级数，因为式中出现了线性项。还需要把它展成三角级数代进去，经计算容易得到 $f(x)=x$ 在 $(-\pi,\ \pi)$ 的付立叶级数是

$$x=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$\therefore\quad x^3=12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3}+$$

$$+2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

两端再从 0 到 x 积分得

$$\frac{1}{4}x^4=12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{\sin nx}{n^3}dx+$$

$$+2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\int_0^x\frac{\sin nx}{n}dx$$

$$=12\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\right]+$$

$$+2\pi^2\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]$$

$$=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+\frac{1}{6}\pi^4+$$

$$+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

$$\left(\text{此处用到例 3 的结论}\frac{\pi^2}{12}=\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{n\mp 1}}{n^2}\right)$$

即 $$x^4=8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}$$

$$+\frac{2}{3}\pi^4+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

为了得出最简单的结果，还应计算$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$。可以由学生证明$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}=\frac{7}{720}\pi^4$，借此知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=-\frac{7}{720}\pi^4$$

$$\therefore\quad x^4=8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+$$

$$+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}+\frac{2}{3}\pi^4+48\left(-\frac{7}{720}\pi^4\right)$$

$$=8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}+$$

$$+48\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\cos nx}{n^4}+\frac{1}{5}\pi^4.$$

五、付立叶级数的复数形式。

付立叶展开式的复数形式可以简化计算，同时也有利于讨论一些联系实际的问题，如频谱分析等。但是往往被学生忽视，因此应当让学生适当地练习这类题目。

付立叶级数的复数形式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nwt+b_n\sin nwt)$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}e^{inwt}+\frac{a_n+ib_n}{2}e^{-inwt}\right)$$

若记 $a_0=\dot{c}_0\quad a_n-ib_n=\dot{c}_n\quad a_n+ib_n=\dot{c}_{-n}$

上面的式子就化为

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{c}_n e^{inwt}$$

这里 $\dot{c}_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-inwt}dt$

$T=\frac{2\pi}{w}$，$n=0$，±1，±2，…

例 5 设周期为 T 的函数在[0，T) 内的表达式为

$$f(t)=\frac{h}{T}t\qquad 0\leqslant t<T$$

(其图形如图 3)．将此函数展开为复数形式的付立叶级数。

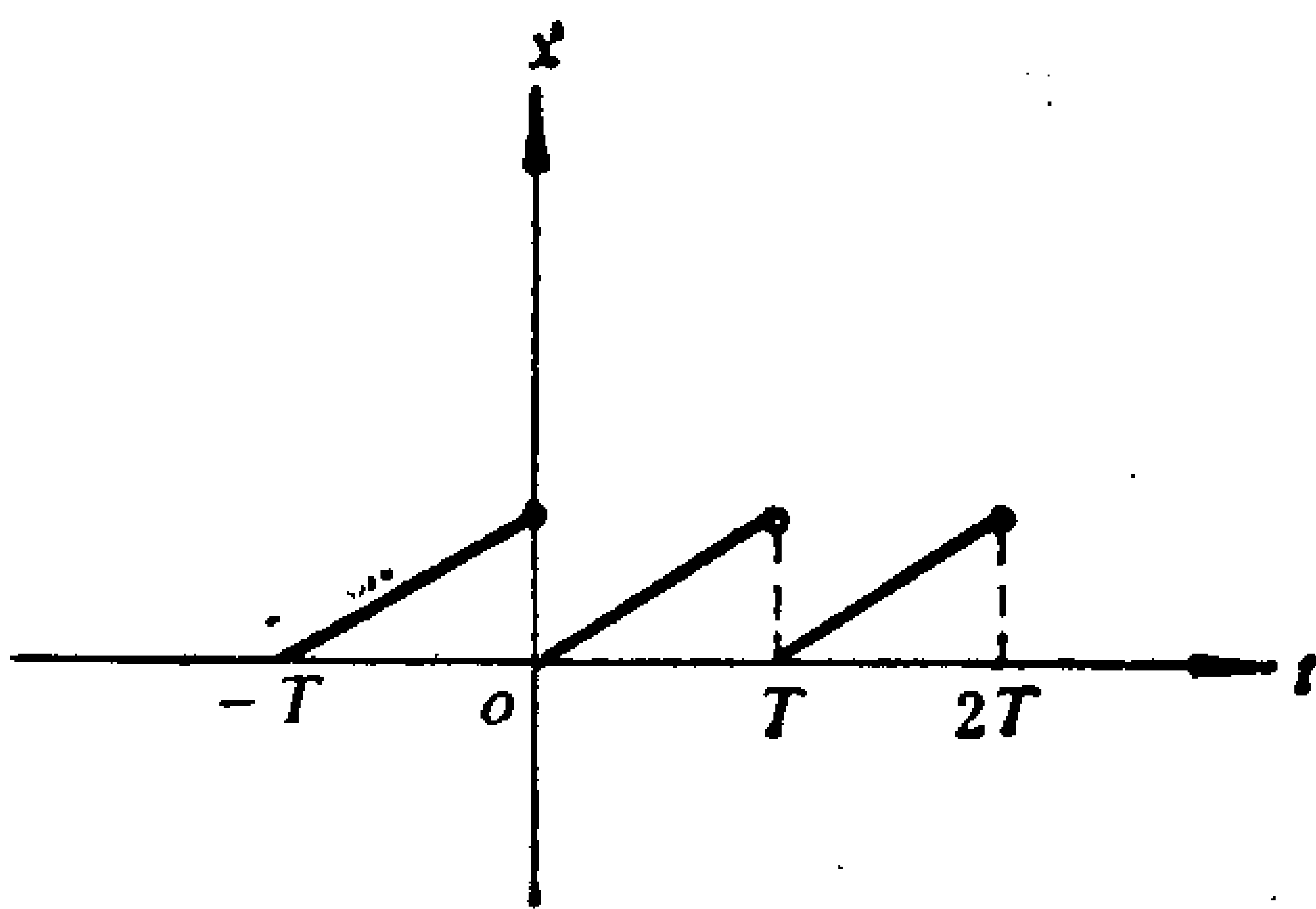


图 3

解 $\dot{c}_0=a_0=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{h}{T}tdt=h$

$$\dot{c}_n=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{h}{T}te^{-inwt}dt=\frac{h}{n\pi}i$$

∴ $f(t)$的复数形式的付立叶展开式为

$$f(t)=\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{h}{n\pi}i\cdot e^{inwt}$$

六、下面是有关付立叶级数的一些练习题，可以选择使用。

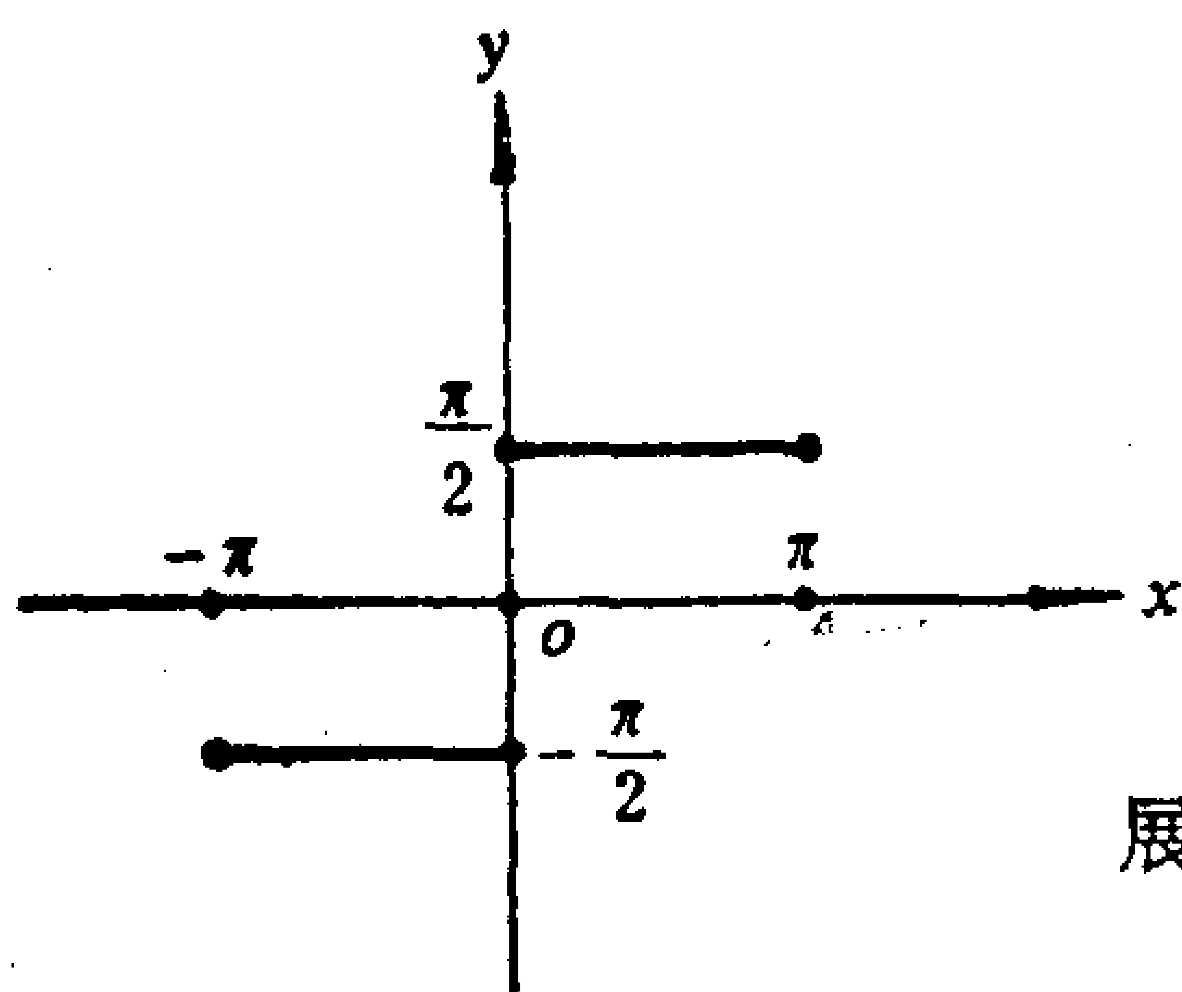


图 4

1. 将函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 0<x<\pi \\ 0 & x=0,\ \pm\pi \\ -\frac{\pi}{2} & -\pi<x<0\end{cases}$$

展成付立叶级数（图 4）.

解 $f(x)$是奇函数容易知道，$x\neq 0$，$\pm\pi$ 时

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)}.$$

此级数在 $x=0$，$\pm\pi$ 时恰好收敛于 $f(0)=f(\pm\pi)=0$，所以

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}=f(x) \qquad x\in[-\pi,\ \pi]$$

2. 在区间（0，2π）内将函数

$$f(x)=\frac{\pi-x}{2}$$

展成付立叶级数。

解

$$a_0=0, \qquad a_n=0$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin nx=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n} \qquad (0<x<2\pi).$$

这级数里不含余弦项（及常数项）. 必是奇函数的展开

式，但在 0，$\pm n\pi$（$n=1,2,\cdots$）处收敛于 0。（图 5）

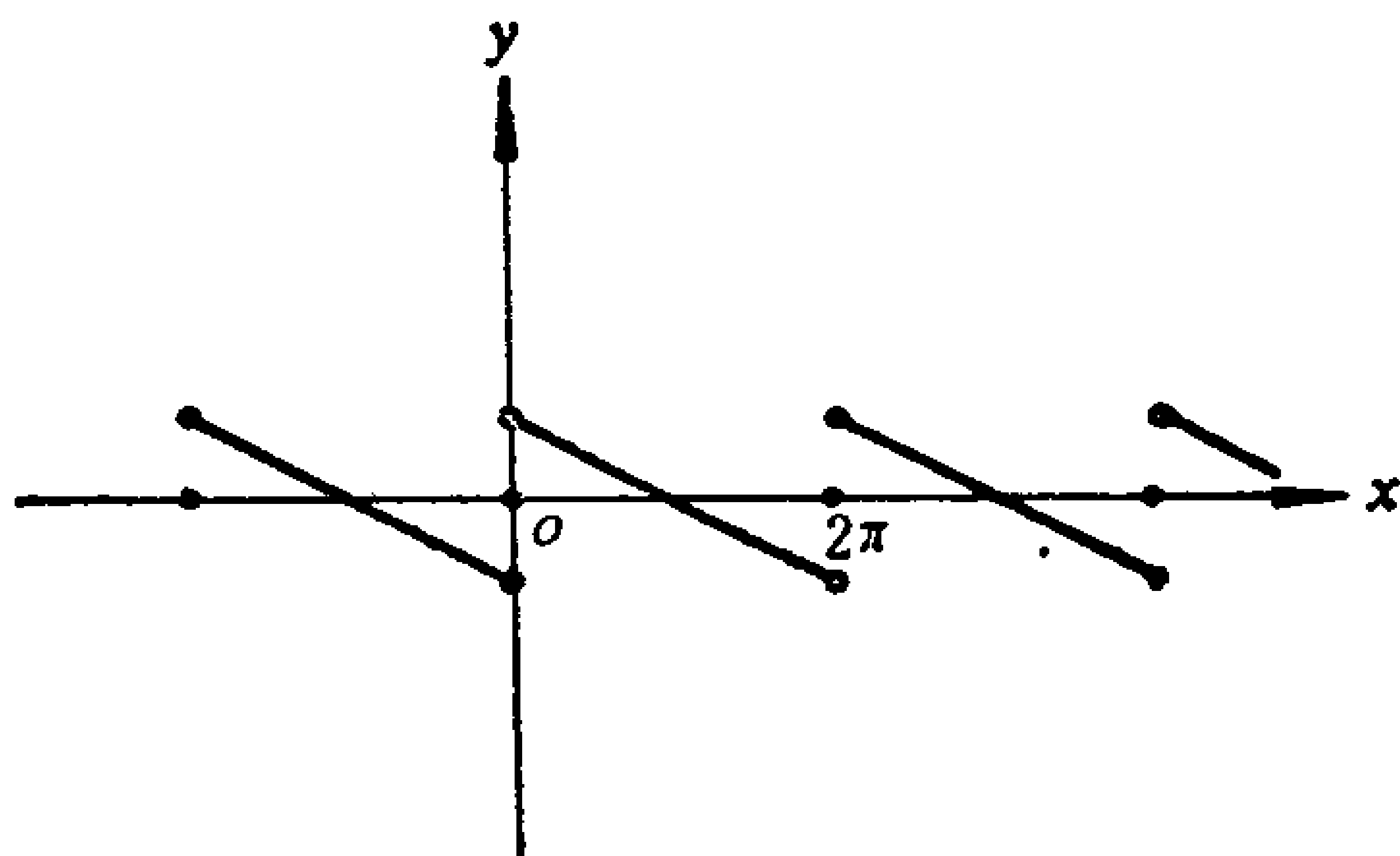


图 5

3． 将函数

$$f(x)=\begin{cases}1 & -l<x<-\dfrac{l}{3}\\ -1 & -\dfrac{l}{3}<x<\dfrac{l}{3}\\ 2 & \dfrac{l}{3}<x<l\end{cases}$$

展成付立叶级数。

解 此函数可视为以 $2l$ 为周期的函数，经计算得

$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{3}\left[-5\cos\frac{n\pi x}{l}+\right.$$

$$\left.+2\sin\frac{2n\pi}{3}\sin\frac{n\pi x}{l}\right].$$

要注意在点 $-l$，$-\dfrac{l}{3}$，$\dfrac{l}{3}$，l 处这级数收敛于什么值。

4． 在$[-\pi,\pi]$将

$$f(x)=x\sin x$$

展成付立叶级数。

解

$f(x)$为偶函数．展开式中不含正弦项，经计算得到

$$f(x)=1-\frac{\cos x}{2}-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx.$$

5． 在 $(-\pi,\ \pi)$ 上将函数

$$f(x)=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$$

展成付立叶级数．

解 这是奇函数，所以展开式中不含常数项及余弦项，经计算可得

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.$$

但我们知道（一般课上作为例子讲）

$$|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}\qquad(-\pi,\ \pi)$$

又知 $$\frac{d|x|}{dx}=\mathrm{sgn}x\qquad(x\neq 0)$$

所以对上面级数逐项微分也得到 $\mathrm{sgn}\,x$ 的付立叶展开式（对于 $x=0$ 的情形，验证级数在 $x=0$ 收敛于 0 即可）．

6． 利用复数可以将一些函数展成付立叶级数的过程简化．

如将 $f(x)=\dfrac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2}$ $(|q|<1)$．

展成付立叶级数时可令

$$t=e^{ix},\qquad \overline{t}=e^{-ix}$$

则 $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$， $\cos x = \frac{1}{2}(t + \bar{t})$

因此

$$\frac{q\sin x}{1-2q\cos x+q^2} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-tq} - \frac{1}{1-\bar{t}q}\right]$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(tq)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(\bar{t}q)^n\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2i}(t^n - \bar{t}^n)q^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}q^n \sin nx \qquad |x| < +\infty.$$

同样可展开函数

$$\frac{1-q\cos x}{1-2q\cos x+q^2} = \sum_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx \quad |q|<1 \quad |x|<+\infty$$

7. 已知 $f(x)$ 是周期为 2π 的可积函数。试用它的付立叶系数 a_n，b_n ($n=0$，1，2，…) 计算 $f(x+h)$ （h 为常数）的付立叶系数 $\overline{a_n}$，$\overline{b_n}$。

解 $\pi\overline{a_n} = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx dx$

$$= \int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)dt$$

$$= \pi(a_n\cos nh + b_n\sin nh)$$

同样计算得

$$\pi\overline{b_n} = \pi(b_n\cos nh - a_n\sin nh)$$

∴ $\overline{a_n} = a_n\cos nh + b_n\sin nh$

$\overline{b_n} = b_n\cos nh - a_n\sin nh \quad n = 0，1，2，\cdots$

附　　录

在本附录里，我们再选出一部份补充例题并附有详细的解答。不过我们希望读者尽可能独立地解答这些问题，这样可以得到更多的锻炼，因而受益更大。

（一）　数列的极限

数列的极限是数学分析的重要内容。判定数列极限的存在，寻求极限值有种种方法，如应用单调有界数列极限存在定理，柯西收敛原理等。而斯笃兹定理是处理 $\frac{\infty}{\infty}$ 型和 $\frac{0}{0}$ 型极限的重要方法。下面的例题可作为综合练习的内容。

例 1　证明数列

$a_1 = 1 - \ln 1$，　$a_2 = 1 + \frac{1}{2} - \ln 2$，……，$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ 的极限存在。

证明　由于数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 和 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 分别递增和递减趋于极限值 e，故有

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

取对数并稍加变形即得：

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}$$

令 $n=1,2,\cdots,k$，则得出下面一系列不等式

$$\ln 2-\ln 1<1$$

$$\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\ln(k+1)-\ln k<\frac{1}{k}$$

将上面不等式两端分别相加，得：

$$\ln(k+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}$$

因而 $a_{k+1}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}-\ln(k+1)>\frac{1}{k+1}$ >0 这说明数列$\{a_n\}$有下界。

又 $a_{k+1}-a_k=\frac{1}{k+1}-\ln(k+1)+\ln k<0$

所以数列$\{a_n\}$单调下降。根据单调有界数列极限存在定理知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并记为 C。即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)=C$$

其中 C 叫 Euler 常数，可算出 $C\approx 0.5772$

下面的例 2 和本书第二章 § 2 练习 3 类似。而例 2 与例 1 的证法也类似。说明这种方法有一定的普遍性。

例 2 设 $0<x<1$，证明数列

$$y_1=\frac{x}{2},\quad y_2=\frac{x}{2}-\frac{y_1^2}{2},\quad\cdots,\quad y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2},\cdots\text{收敛。}$$

证明 首先易证 $0<y_n<1/2(n=1,2,\cdots)$，因而$\{y_n\}$有界，根据所给数列作出一系列等式：

$$y_1 - y_2 = \frac{y_1^2}{2}$$

$$y_2 - y_3 = \frac{y_2^2 - y_1^2}{2}$$

$$y_3 - y_4 = \frac{y_3^2 - y_2^2}{2}$$

$$y_4 - y_5 = \frac{y_4^2 - y_3^2}{2}$$

……

$$y_{n-1} - y_n = \frac{y_{n-1}^2 - y_{n-2}^2}{2}$$

……

将上面相邻的两等式相加可得

$$y_{2k-1} - y_{2k+1} = \frac{1}{2}(y_{2k}^2 - y_{2k-2}^2)$$

$$y_{2k} - y_{2k+2} = \frac{1}{2}(y_{2k+1}^2 - y_{2k-1}^2)$$

其中 $y_0 = 0, k = 1, 2, \cdots$

用数学归纳法容易证明：

$$y_{2k-1} > y_{2k+1}, \quad y_{2k} < y_{2k+2}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

并且对于任意 k，有 $0 < y_k < \frac{1}{2}$. 这就证明了两个数列 $\{y_{2k-1}\}$ 和 $\{y_{2k}\}$ 都收敛。

设 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{2k-1} = l$, $\quad \lim\limits_{k\to\infty} y_{2k} = l_1$,

若 n 是偶数，在等式

$$y_n - y_{n+1} = \frac{y_n^2 - y_{n-1}^2}{2}$$ 两端令 $n \to +\infty$ 取极限可得

$$l_1 - l = \frac{l_1^2 - l^2}{2}$$

或 $(l_1-l)(l_1+l-2)=0$

因为 $0<y_n<\frac{1}{2}$，所以不可能有 $l_1+l=2$，换句话说 $l=l_1$，再由等式

$$y_n=\frac{x}{2}-\frac{y_{n-1}^2}{2} \qquad (n\to\infty)$$

得到

$$l=\frac{x}{2}-\frac{l^2}{2}$$

因为 $l>0$，所以 $l=-1+\sqrt{x+1}$。

例3 设 x_0, x_1，$x_{n+1}=x_n+r^n x_{n-1}$，$0<r<1$，证明数列$\{x_n\}$收敛。

证 由 $x_2=x_1+rx_0$ 知道 $|x_2|\leqslant a(1+r)$，其中 $a=$ $=\max\{|x_0|, |x_1|\}$。

再由$x_3=x_2+r^2x_1$知道

$$|x_3|\leqslant a(1+r)+ar^2<a(1+r)(1+r^2)$$

用数学归纳法容易证明

$$|x_{n+1}|\leqslant a(1+r)(1+r^2)\cdots(1+r^n)$$

根据不等式 $1+x\leqslant e^x$ $(x\geqslant 0)$，可以得出

$$|x_{n+1}|\leqslant ae^r\cdot e^{r^2}\cdot e^{r^n}=ae^{r+r^2+\cdots+r^n}\leqslant ae^{\frac{r}{1-r}}\equiv k(\text{常数})$$

故数列$\{x_n\}$有界。

因为

$$|x_{n+p}-x_n|\leqslant|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+$$
$$+|x_{n+1}-x_n|$$
$$=r^{n+p-1}|x_{n+p-2}|+r^{n+p-2}|x_{n+p-3}|+\cdots+$$
$$+r^n|x_{n-1}|$$

$$\leqslant K\cdot r^n(1+r+r^2+\cdots+r^{p-1})\leqslant\frac{Kr^n}{1-r}$$

根据柯西收敛原理可以知道数列$\{x_n\}$收敛。

例 4 设$b_1=b_2=1$，$b_n+b_{n+1}=b_{n+2}$，试证：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\quad\text{或}\quad\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\approx 0.618.$$

证 考虑等式

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\right|=\left|\frac{b_{n+1}^2-b_nb_{n+2}}{b_n\ b_{n+1}}\right|$$

容易用数学归纳法证明：

$b_nb_{n+2}-b_{n+1}^2=(-1)^{n+1}$，并且当$n>4$时，有$b_n\geqslant n$。

所以当$n>4$时，有

$$\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}-\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}\right|=\frac{1}{|b_n||b_{n+1}|}\leqslant\frac{1}{n^2}$$

用柯西收敛原理能证：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$存在，设其为$l$。

再由等式：$b_n+b_{n+1}=b_{n+2}$可以求得$l=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$。

例 5 将例 4 中的数列推广如下：

设b_1,b_2是不同时为零的数*，$k>0$，$l>0$，令

$$b_{n+2}=kb_{n+1}+lb_n$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$。

解：我们不采用上例的解法，而是利用数列的递推关系

---

*可以证明至少对充分大的n，$b_n\neq 0$，因此$\frac{b_{n+1}}{b_n}$有意义

求出数列的通项表达式。

首先考虑方程：$x^2-kx-l=0$ 的两个根 α,β：

$$\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4l}}{2},\qquad \beta=\frac{k-\sqrt{k^2+4l}}{2}$$

有关系：$\begin{cases}\alpha+\beta=k\\ \alpha\beta=-l\end{cases}$ 且 $\left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|<1$

由数列的递推关系：$b_{n+2}=kb_{n+1}+lb_n$ 得以下关系：

$$b_{n+2}-\alpha b_{n+1}=\beta(b_{n+1}-\alpha b_n) \tag{1}$$

或 $$b_{n+2}-\beta b_{n+1}=\alpha(b_{n+1}-\beta b_n)\quad n=1,2,\cdots \tag{2}$$

反复利用（1）式或（2）式可推得：

$$b_{n+2}-\alpha b_{n+1}=\beta^n(b_2-\alpha b_1) \tag{3}$$

或 $$b_{n+2}-\beta b_{n+1}=\alpha^n(b_2-\beta b_1)\quad n=1,2,\cdots \tag{4}$$

(i) 当 $b_2-\beta b_1=0$ 时，有

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=\beta,\ \text{所以}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=\beta=\frac{k-\sqrt{k^2+4l}}{2}$$

(ii) 当 $b_2-\beta b_1\neq 0$ 时，由（3）或（4）可得

$$b_{n+2}=\frac{\alpha^{n+1}(b_2-\beta b_1)-\beta^{n+1}(b_2-\alpha b_1)}{\alpha-\beta}$$

于是当 $b_{n+1}\neq 0$ 时，由

$$\frac{b_{n+2}}{b_{n+1}}=\frac{\alpha^{n+1}(b_2-\beta b_1)-\beta^{n+1}(b_2-\alpha b_1)}{\alpha^n(b_2-\beta b_1)-\beta^n(b_2-\alpha b_1)},\ \text{及}\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|<1.$$

得到：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+2}}{b_n}=\alpha=\frac{k+\sqrt{k^2+4l}}{2}$$

例 6 设 $a>1$，$x_1>\sqrt{a}$，$x_{n+1}=\dfrac{a+x_n}{1+x_n}$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，它的值 l 必是函数 $f(x)=\dfrac{a+x}{1+x}$ 的不动点，且易算出 $l=\sqrt{a}$。利用函数 $f(x)$ 可将数列 x_n 写为

$$a>1,\ x_1>\sqrt{a},\ x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,2,\cdots)$$

下面证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在并同时求出极限值。

由于 $f'(x)=\dfrac{1-a}{(1+x)^2}<0$ （当 $x\neq-1$）于是 $f(x)$在 $(-1,+\infty)$ 下降 且 $f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$，$f(x)>1$

于是

$$1<x_2=f(x_1)<f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$$
$$x_3=f(x_2)>f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$$
$$1<x_4=f(x_3)<f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$$
$$x_5=f(x_4)>f(\sqrt{a})=\sqrt{a}$$
$$\vdots$$

一般地有 $1<x_{2k}<\sqrt{a}$， $x_{2k-1}>\sqrt{a}$ $(k=1,2,\cdots)$

再由 $x_{n+1}-x_{n-1}=\dfrac{2(a-x_{n-1}^2)}{1+a+2x_{n-1}}$ $(*)$

知$\{x_{2k}\}$单调上升有界，$\{x_{2k-1}\}$单调下降有界，因此$\{x_{2k}\}$，$\{x_{2k-1}\}$都收敛，在等式（$*$）两端取极限，得

$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\sqrt{a}$，于是$\{x_n\}$ 收敛于$\sqrt{a}$。

例 7 任意给定实数 a_0，

令 $a_{n+1}=\cos a_n\quad (n=0,1,2,\cdots)$

证明： $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在且不依赖于 a_0

证： 证明方法类似例 6，设函数 $f(x)=x-\cos x$，容易证明 $f(x)$在区间 [0，1] 满足连续函数的中间值定理的条件，

故存在 $\xi\in(0,\ 1)$，使 $f(\xi)=0$　即 $\xi=\cos\xi$

$\forall x\in(-\infty,+\infty)$，$\exists\eta\in(x,\xi)$ 使

$$\cos x-\cos\xi=-\sin\eta(x-\xi)$$

若 $x\in[0,\ 1]$，则 $\eta\in(0,\ 1)$，由于 $|-\sin\eta|\leqslant\sin 1$，所以

$$|\cos x-\cos\xi|\leqslant(\sin 1)|x-\xi|$$

有　$a_1=\cos a_0\in[-1,1]$，　$a_2=\cos a_1\in[0,1]$

易知　$a_n\in[0,1]$ 当 $n\geqslant 2$。所以

$$|a_{n+1}-\xi|=|\cos a_n-\cos\xi|\leqslant(\sin 1)|a_n-\xi|$$

反复用上面不等式，得到

$$|a_{n+1}-\xi|\leqslant(\sin 1)^n|a_1-\xi|$$

因而得到

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\xi$$

且 ξ 不依赖于 a_0。

例 8　数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，满足下面不等式

$$a_{m+n}\leqslant a_m+a_n,\qquad m,n=1,2,\cdots$$

证明数列

$$\frac{a_1}{1},\ \frac{a_2}{2},\cdots,\frac{a_n}{n},\ \cdots$$

收敛于下确界，或者发散为 $-\infty$。

证　我们只证明数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 有下界的情形，此时，它有下确界 α。所以，

$\forall\varepsilon>0$，$\exists m>0$，使得 $\frac{a_m}{m}<\alpha+\varepsilon$。又对于一切 $n>m$，总有：$n=p_nm+q_n$，p_n，q_n 是整数。且 $0\leqslant q_n<m$，于是得到：

$$a_n \leqslant a_{p_n m} + a_{q_n}$$

$$\leqslant \underbrace{a_m + \cdots + a_m}_{p_n\text{个}} + a_{q_n} = p_n a_m + a_{q_n}$$

于是，$\dfrac{a_n}{n} \leqslant \dfrac{p_n a_m + a_{q_n}}{p_n m + q_n} = \dfrac{p_n a_m}{p_n m + q_n} + \dfrac{a_{q_n}}{p_n m + q_n}$

$$= \frac{a_m}{m} \frac{p_n m}{p_n m + q_n} + \frac{a_{q_n}}{n}$$

由此得到下面不等式：

$$\alpha \leqslant \frac{a_n}{n} < (\alpha + \varepsilon) \frac{p_n m}{p_n m + q_n} + \frac{a_{q_n}}{n}$$

令 $n \to \infty$，则 $p_n \to +\infty$，且 q_n 有界，因而 a_{q_n} 有界，故知

$$\alpha \leqslant \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

由 ε 的任意性，可以得到

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = \alpha.$$

对于数列$\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$无下界的情形，我们留给读者去完成。

例 9 设$\{a_n\}$是实数列，它满足不等式：

$0 \leqslant a_k \leqslant 100 a_n$，其中 $n \leqslant k \leqslant 2n$，$n = 1, 2, \cdots$

又级数 $\sum\limits_{n=\infty}^{\infty} a_n$ 收敛，证明

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0.$$

证 由假设，对于正整数 n，

$a_{2n} \leqslant 100 a_n$，　$n \leqslant 2n \leqslant 2n$，

$a_{2n} \leqslant 100 a_{n+1}$，　$n + 1 \leqslant 2n \leqslant 2(n+1)$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{2n}\leqslant 100a_{2n-1},\quad 2n-1\leqslant 2n\leqslant 2(2n-1)$$

将上面不等式两边相加，然后乘 2 得到

$$2na_{2n}\leqslant 200(a_n+\cdots+a_{2n-1})$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\lim_{n\to\infty}200(a_n+\cdots+a_{2n-1})=0$，由此得到 $\lim_{n\to\infty}2na_{2n}=0$。

同样可知 a_{2n-1} 小于或等于 n 个数：$100a_n$，$\cdots 100a_{2n-1}$ 中的每一个，于是

$$(2n-1)a_{2n-1}\leqslant 2na_{2n-1}\leqslant 200(a_n+\cdots+a_{2n-1})\to 0,$$

$(n\to\infty)$ 于是我们证明了 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$。

例 10 设$0<x_1<1$，$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\lim_{n\to\infty}nx_n=1$。

证 容易用数学归纳法证明：$x_n\in(0,1)$ $n=1,2,\cdots$，于是

$$0<\frac{x_{n+1}}{x_n}=(1-x_n)<1,\quad n=1,2,\cdots$$

所以数列$\{x_n\}$严格下降且有下界，从而 $\lim_{n\to\infty}x_n=a$ 存在，在等式：$x_{n+1}=x_n(1-x_n)$两边取极限，得到

$$a=a(1-a)$$

所以 $a=0$，即 $\{x_n\}$ 是无穷小量又 $x_n\neq 0$，因此 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是无穷大量，由斯铎兹定理，有

$$\lim_{n\to\infty}nx_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{x_n-x_{n+1}}{x_nx_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{x_n^2}{x_nx_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\dfrac{x_n}{x_{n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(1-x_n)=1。$$

注：上面例题如果写成 $\lim_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{\dfrac{1}{n}}$，然后用 $\dfrac{0}{0}$ 型的斯铎兹定理解很难求出极限。

（二）一致连续和一致收敛。

函数的一致连续和级数的一致收敛是重要的概念，本节的例题只是用这两个概念对于极限概念中 ε-δ 方法给出一些训练。

例1 若 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致连续，则存在常数 $A,B>0$，使得

$$|f(x)|<A|x|+B$$

证 对于 $\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in(-\infty,+\infty)$，当 $|x'-x''|<\delta$ 时，$|f(x')-f(x'')|<1$。任取 $x\in(-\infty,+\infty)$ 将 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ n 等分，分点为 $x_{i-1}=\dfrac{i-1}{n}x$，$(i=1,2,\cdots,n+1)$ 其中 $x_0=0$，$x_n=x$，使得

$$\frac{|x|}{n}<\delta,\qquad \frac{|x|}{n-1}\geqslant\delta。$$

即将 $[0,x]$ 所分的每个子区间长 $\dfrac{|x|}{n}$ 小于 δ，但 $\dfrac{|x|}{n-1}\geqslant\delta$，

即 $\qquad (n-1)\delta<|x|<n\delta$

则

$$|f(x)-f(0)|\leqslant\left|f(x)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right|+\left|f\left(\frac{n-1}{n}x\right)-\right.$$

$$-f\left(\frac{n-2}{n}x\right)\Big|+\cdots+\Big|f\left(\frac{2}{n}x\right)-f\left(\frac{x}{n}\right)\Big|+\Big|f\left(\frac{x}{n}\right)-f(0)\Big|$$

$$<1+1+\cdots+1=n\leqslant\frac{|x|}{\delta}+1$$

所以 $|f(x)|<\frac{|x|}{\delta}+1+|f(0)|$

取 $A=\frac{1}{\delta}$，$B=|f(0)|+1$

于是 $|f(x)|<A|x|+B$。

我们知道在$(-\infty,+\infty)$上一致连续的函数$f(x)$不一定有界，但本题说明这样的$f(x)$必定受某个"一次函数"$\varphi(x)=A|x|+B$控制（如图1）。

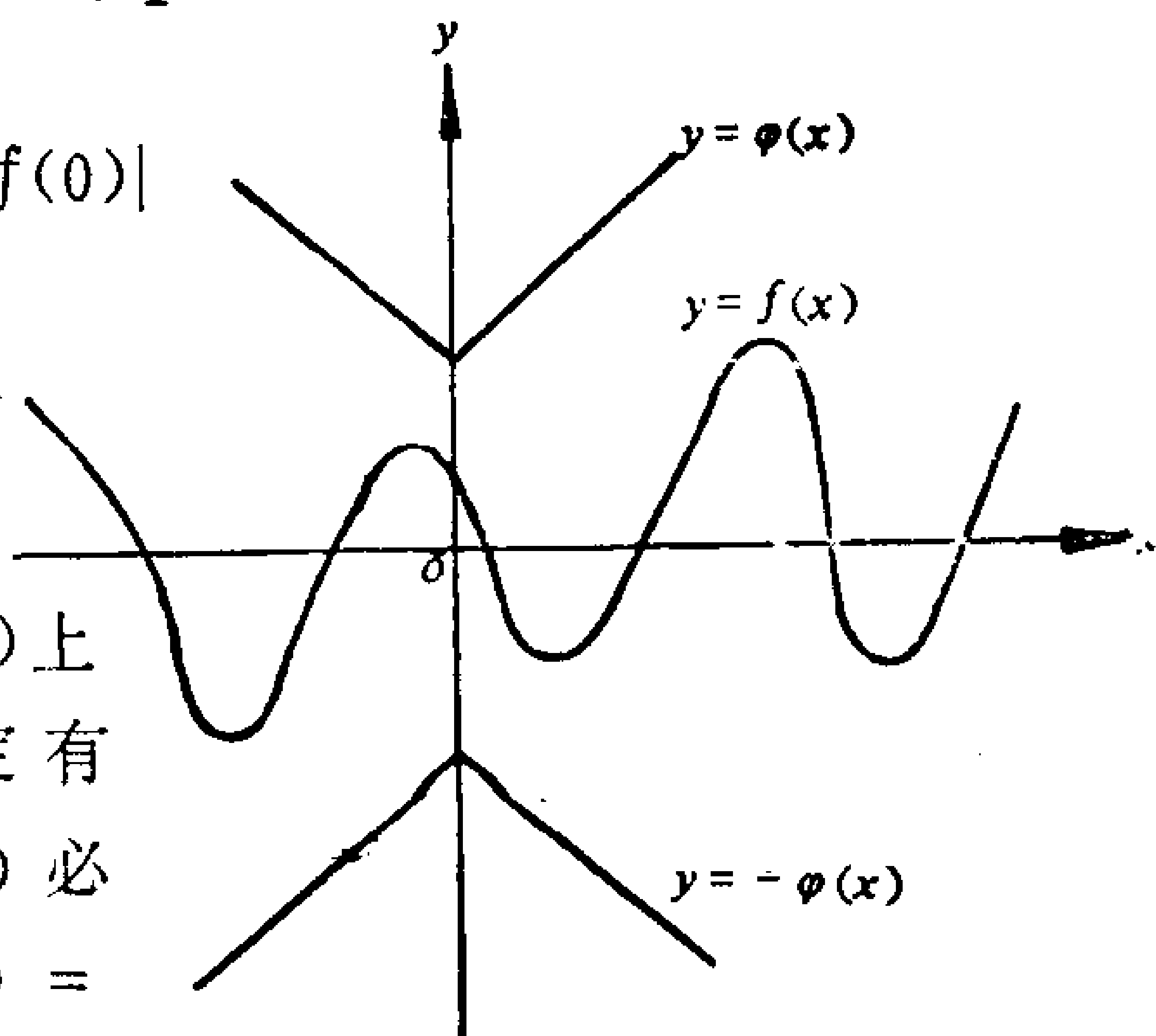


图 1

例 2 设$u_n(x)=\begin{cases}-n, & 当\ x\leqslant -n,\\ x, & 当\ -n<x<n,\\ n, & 当\ x\geqslant n\end{cases}$

其中$n=1,2,3,\cdots\cdots$ 而$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上的实值函数，如果对每个n函数$g_n(x)=u_n(f(x))$都是连续函数，试证：$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续。

证 设x_0是$(-\infty,+\infty)$内任一点。取充分大的正整数n，使$-n<f(x_0)<n$，于是

$$u_n(f(x_0))=f(x_0)\quad 因而\quad -n<u_n(f(x_0))<n$$

由于$u_n(f(x))$在x_0连续，所以存在$\delta>0$，

使当$|x-x_0|<\delta$时，

$$-n<u_n(f(x))<n$$

因此当$|x-x_0|<\delta$时，$u_n(f(x))=f(x)$。而$u_n(f(x))$在

$x=x_0$ 连续，故 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续，而 x_0 是 $(-\infty,+\infty)$ 内任意一点，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续。

前面第四章提到函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内一致连续的充要条件是 f 在 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在 我们补证如下：

证：（必要性） 由于 f 在 (a,b) 内一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x'$，$x''\in(a,b)$，只要 $|x'-x''|<\delta$，就有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$ 成立。因此，$\forall x'$，$x''\in(a,b)$ 只要 $0<x'-a<\delta$，且 $0<x''-0<\delta$ 就有 $|x'-x''|<\delta$，从而有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

成立。根据柯西收敛原理，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 存在。同样可证 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在。

（充分性）作辅助函数

$$F(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a^+}f(x), & x=a,\\ f(x) & ,a<x<b,\\ \lim\limits_{x\to b^-}f(x), & x=b.\end{cases}$$

则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续因此一致连续，于是 $F(x)$ 在 (a,b) 内一致连续，也就是 $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续。

对于无穷区间这个条件不是必要的，例如 $\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致连续，但是 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sin x$ 都不存在。关于定理充分性的证明留给读者。

例3 设 f 是定义在有界实数集 E 上的实函数，且对 E 中任一柯西数列 $\{x_n\}$，$\{f(x_n)\}$ 也是柯西数列。试证：f 在 E

上一致连续。

证 我们采用反证法，假设 f 在 E 上不一致连续，则 $\exists\,\varepsilon_0>0$，$\forall\,\delta>0$，$\exists\,x'$，$x''\in E$，满足 $|x'-x''|<\delta$，但 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$。对于 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$\exists\,x_n'$，$x_n''\in E$，满足 $|x_n'-x_n''|<\dfrac{1}{n}$ 时，有 $|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0$。因为数列 $\{x_n'\}$ 有界，故有收敛子列，不妨设 $\{x_n'\}$ 为收敛子列，其极限为 a。

现作数列 $\{x_n\}$ 如下：

$x_1',x_1'',x_2',x_2'',\cdots,\ x_n',x_n'',\cdots$

因为 $x_n'\to a$，及 $x_n'-x_n''\to 0$，故 $x_n''\to a$，所以 $\{x_n\}$ 收敛于 a，故为柯西列，而 $\{f(x_n)\}$ 不是柯西列，这一矛盾说明 f 在 E 上一致连续。

例 4 设 $f(x)$ 是闭区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上连续函数，且满足不等式 $|f(x)|<|x|$，当 $x\neq 0$。如下定义函数列 $\{f_n(x)\}$：$f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，$\cdots$，$f_{n+1}(x)=f(f_n(x))$，$\cdots$ 证明：$\{f_n(x)\}$ 在 $[-a,a]$ 上一致收敛于零。

证 由于 $|f(x)|<|x|\to 0$（当 $x\to 0$ 时）

及 f 的连续性知 $\quad f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

因此对于一切 $x\in[-a,a]$，有

$$|f(x)|\leqslant|x|$$

而 $\quad \dfrac{|f(x)|}{|x|}<1 \quad$ 当 $x\in[-a,a]$ 且 $x\neq 0$

$\forall\varepsilon>0$，$\dfrac{|f(x)|}{|x|}$ 在 $[-a,-\varepsilon]$ 及 $[\varepsilon,a]$ 上连续，因而可以达到最大值 $k<1$，所以

$|f(x)| \leqslant k|x| \leqslant ka$ 当 $x \in [-a,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,a]$

又 $|f(x)| \leqslant |x| \leqslant \varepsilon$，当 $x \in [-\varepsilon,\varepsilon]$

所以 $|f_1(x)| = |f(x)| \leqslant \max(ka,\varepsilon)$，$x \in [-a,a]$

当 $x \in [-a,a]$时，$|f(x)| \leqslant |x| \leqslant a$。

所以当 $f(x) \in [-\varepsilon,\varepsilon]$时，

$$|f_2(x)| = |f(f(x))| \leqslant |f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

当 $f(x) \in [-a,-\varepsilon] \cup [\varepsilon,a]$时

$$\begin{aligned}|f_2(x)| = |f(f(x))| \leqslant k|f(x)| &\leqslant k\max\{ka,\varepsilon\} \\ &= \max\{k^2a,k\varepsilon\} \\ &\leqslant \max\{k^2a,\varepsilon\}\end{aligned}$$

故当 $x \in [-a,a]$ 时，有 $|f_2(x)| \leqslant \max\{k^2a,\varepsilon\}$

用数学归纳法容易证明：

$|f_n(x)| \leqslant \max\{k^na,\varepsilon\}$，当 $x \in [-a,a]$，$n = 1,2,\cdots$

因为 $0<k<1$，所以 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，$k^n a<\varepsilon$

所以当 $n>N$ 时，$|f_n(x)| \leqslant \max\{k^n a, \varepsilon\} < \varepsilon$，对一切 $x \in [-a,a]$ 成立，这样就证明了当 $n \to \infty$ 时，$f_n(x)$ 在 $[-a,a]$上一致收敛于零。

（三）微分学

微分学理论中关于函数及导函数的零点、极限性质及估值等问题的论证中，多数要用到罗尔定理、拉格朗日定理、达布定理和台劳公式，为了应用上述定理解决一些问题，我们将举上面提出的几方面例题。

例 1 设 $f \in C[a,b]$，f' 在 (a,b) 存在，且$f(a) = f(b)$ 则存在常数 λ 和 c，$c \in (a,b)$，使得 $f'(c) = \lambda f(c)$ 。

证 令 $F(x) = g(x)f(x)$，$x \in [a,b]$，其中 $g(x)$ 是待定的可微函数，且 $g(a) = g(b)$。

容易证明：$F(x)$在$[a,b]$内满足罗尔定理的条件，因此$\exists c\in(a,b)$，使得$F'(c)=0$，即$g(c)f'(c)=-g'(c)f(c)$，令$g(c)=-1$，因为满足条件$\begin{cases}g(a)=g(b)\\ g(c)=-1\end{cases}$的可微函数是存在的，故存在$\lambda=g'(c)$，使得$f'(c)=\lambda f(c)$。

例2 设f在$(-\infty,+\infty)$上二阶可微，$f''>0$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$，且存在$x_0$，使$f(x_0)<0$，则$f$在$(-\infty,+\infty)$有且仅有二个零点。

证 由已知条件$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$

$\Rightarrow$ $\exists E>x_0$，$\forall x>E$，有$f'(x)>0$。

$\Rightarrow$ $\forall x>E$，f严格上升。

再由已知条件$f''>0$

$\Rightarrow$ f在$(-\infty,+\infty)$是可微凸函数。

$\Rightarrow$ $\forall x>a$，有$f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)$。

取$x>a>E$，因为$f'(a)>0$，所以$\exists b>a$，使得

$$f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$$

又$f(x_0)<0$由连续函数中间值定理知$\exists x_1\in(x_0,b)$使$f(x_1)=0$

同理存在$x_2\in(-\infty,x_0)$，使$f(x_2)=0$

用反证法及罗尔定理易证只有这两个根。

例3 设f在$(a,+\infty)$上二阶可导，且$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=0$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 则$\exists\eta\in(a,+\infty)$使$f''(\eta)=0$

证 （用反证法）

若$\forall x\in(a,+\infty)$，$f''(x)\neq0$，则由达布定理可知f''

必保持同号。不妨设 $f''(x)>0$，$(a<x<+\infty)$

于是 f' 在 $(a,+\infty)$ 上严格上升。再由条件 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ 及推广的罗尔定理*知，存在 $x_1>a$

使 $f'(x_1)=0$ 取定 $\xi\in(x_1,+\infty)$，则 $f'(\xi)>f'(x_1)=0$

因此当 $x>\xi$，$f(x)>f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi)$，于是，有

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ 与已知条件矛盾，因此必 $\exists\,\eta\in(a,+\infty)$

使 $f''(\eta)=0$。

例4 设f在$[a,b]$连续，且$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b xf(x)dx=0$。则至少存在两点 x_1，$x_2\in(a,b)$，使得 $f(x_1)=f(x_2)=0$。

证 不妨设$f\neq 0$，已知f在$[a,b]$连续且 $\int_a^b f(x)\,dx=0$ $\Rightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上必变号，故存在 $x_1\in(a,b)$ 使 $f(x_1)=0$。假若 x_1 是 f 的唯一零点，则 $(x-x_1)f(x)$ 在 $[a,b]$ 有确定的符号

$\Rightarrow$ $\int_a^b(x-x_1)f(x)dx\neq 0$，但是 $\int_a^b(x-x_1)f(x)dx=$

$\int_a^b xf(x)dx-x_1\int_a^b f(x)dx=0$。导出的矛盾说明$f$在$[a,b]$内至少有两个零点。

例5 若 f' 在 $[0,+\infty)$ 上存在，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=B$，则 $B=0$

(*) 推广的罗尔定理：设 f 是区间 I 上的可微函数，若 f 在 I 的两个端点处存在相等的单侧极限，则必存在一点 $\eta\in I$，使 $f'(\eta)=0$

证 假若 $B\neq 0$，不妨设 $B>0$。

由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=B>\dfrac{B}{2}>0\Rightarrow \exists E>0$，$\forall x>E$，$f'(x)>$ $>\dfrac{B}{2}$，$\forall x>E$，有 $f(x)-f(E)=f'(\xi)(x-E)>\dfrac{B}{2}(x-E)$，即 $f(x)>f(E)+\dfrac{B}{2}(x-E)\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$。这个结果与已知条件矛盾。因而 $B=0$。

例 6 设 f 在 $[a,+\infty)$ 连续，f' 在 $(a,+\infty)$ 存在且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$，则 f 在 $[a,+\infty)$ 不一致连续。

证 $\forall\delta>0$，取 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\delta$，即 $n>\dfrac{1}{\delta^2}$，对于这样的 n，$\exists x_n>n$，$\forall x>x_n$ 有 $f'(x)>n$，取 $x'=n$，$x''=n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，有 $|x'-x''|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\delta$，但是 $|f(x')-f(x'')|=|f'(\xi)|\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $>\sqrt{n}$，所以 f 在 $[a,+\infty)$ 上不一致连续。

我们知道，f 的导函数 f' 不一定连续，现在介绍一个导函数 f' 类似连续函数的极限性质。

例 7 设 f 在区间 I 上可微，$x_0\in 1$，则存在数列 $\{x_n\}$。$x_n\to x_0$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n)=f'(x_0)$

证 $\forall x^*>x_0$，$\exists x_1\in(x_0,x^*)$，使得

$$\frac{f(x^*)-f(x_0)}{x^*-x_0}=f'(x_1)$$

对于 $x_1>x_0$，$\exists x_2\in(x_0,x_1)$，使得

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=f'(x_2)$$

对于$\frac{x_2+x_0}{2}>x_0$，$\exists x_3\in\left(x_0,\ \frac{x_2+x_0}{2}\right)$使

$$\frac{f\left(\frac{x_2+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_2+x_0}{2}-x_0}=f'(x_3)$$

…………………………

依此类推得到：

对于$\frac{x_n+x_0}{2}>x_0$，$\exists x_{n+1}\in\left(x_0,\ \frac{x_n+x_0}{2}\right)$，使

$$\frac{f\left(\frac{x_n+x_0}{2}\right)-f(x_0)}{\frac{x_n+x_0}{2}-x_0}=f'(x_{n+1})$$

因为 $x_0<x_3<\frac{x_2+x_0}{2}<\frac{x_1+x_0}{2}$

$$x_0<x_4<\frac{x_3+x_0}{2}<\frac{x_1+(1+2)x_0}{2}$$

…………………

$$x_0<x_{n+1}<\frac{x_1+(1+2+\cdots+2^{n-2})x_0}{2}=\frac{x_1-x_0}{2^{n-1}}+x_0.$$

设 $t_n=\frac{x_n+x_0}{2}$，当 $x_n\to x_0$ 时，$t_n\to x_0$ $(n\to\infty)$

$$\therefore\quad \lim_{x\to\infty}\frac{f(t_n)-f(x_0)}{t_n-x_0}=\lim_{\to+\infty}f'(x_{n+1})$$

因而得到：

$$\lim_{n\to\infty}f'(x_{n+1})=f'(x_0).$$

例9 设f在$[0,1]$二阶可导，$f(0)=f(1)=0$，

$\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$，试证：存在$\xi\in(0,1)$，使$f''(\xi)\leqslant 8$。

证 根据已知条件 f 必在 $(0,1)$ 内一点 x_0 取得最小值，即 $f(x_0)=-1$，当然 x_0 也是极小值，所以 $f'(x_0)=0$。于是

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-x_0)^2,$$

$$\xi_1\in(0,x_0)$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-x_0)^2,$$

$$\xi_2\in(x_0,1)$$

又 $f(0)=f(1)=0$，$f'(x_0)=0$。

所以

$$\frac{x_0^2}{2}f''(\xi_1)=-f(x_0)=1\Rightarrow f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}$$

$$\frac{(1-x_0)^2}{2!}f''(\xi_2)=-f(x_0)=1\Rightarrow f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2}$$

在 x_0 与 $(1-x_0)$ 之间至少有一个 $x\geqslant\frac{1}{2}$，不妨设 $x_0\geqslant\frac{1}{2}$，

于是 $f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2}\leqslant 8$。

（四）积分

（1）积分估值与不等式：

对于积分进行估值和证明某些不等式，经常用到积分中值定理、积分换元法、分部积分法；或者将积分化为二重积分的方法；化为离散量的方法；应用台劳公式等方法，我们将上述几种方法举例介绍于下：

例1 （1） 若 $f'(x)\in C[a,b]$，且 $f(a)=0$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f'(x)|\}$$

(2) 若 $f''(x)\in C[a, b]$，且 $f(a)=f(b)=0$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}$$

(3) 若 $f^{(2n)}(x)\in C[a, b]$，且 $|f^{(2n)}(x)|\leqslant M$，$f^{(k)}(a)=f^{(k)}(b)=0 \quad k=0, 1, \cdots, 2n-1$，则

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \frac{(n!)^2 M}{(2n)!(2n+1)!}(b-a)^{2n+1}$$

证 (1) 因为 $\int_a^b f'(x)(b-x)dx=\int_a^b (b-x)d(f(x))$

$$=(b-x)f(x)\Big|_a^b+\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

于是 $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = |f'(\xi)|\left|\int_a^b (b-x)dx\right|$

$$\leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f'(x)|\}$$

用类似方法可以证明（2）和（3），证明留给读者。

例2 设 $f'(x)\in C[a, b]$，$f(a)=0$，则

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2dx-$$

$$-\frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2(x-a)^2dx$$

证 因为 $f(x)=\int_a^x f'(x)dx$，$x\in[a, b]$

所以 $f^2(x)=\left[\int_a^x f'(t)dt\right]^2 \leqslant \int_a^x [f'(x)]^2dx\int_a^x 1^2\cdot dt$

$$=(x-a)\int_a^x f'(t)]^2dt, \quad x\in[a, b]$$

$$\leqslant (x-a)\int_a^b [f'(t)]^2 dt$$

对于上面不等式两端积分，得到

$$\int_a^b f^2(x)dx \leqslant \int_a^b \left\{(x-a)\int_a^x f'(t)]^2 dt\right\}dx$$

$$= \int_a^b dx \int_a^x (x-a)[f'(t)]^2 dt$$

$$= \int_a^b dt \int_t^b (x-a)[f'(t)]^2 dx$$

$$= \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 dx - \frac{1}{2}\int_a^b [f'(x)]^2 (x-a)^2 dx$$

例3 设 $f(x)\in C^{(2)}[a, b]$，则$\exists \zeta \in (a, b)$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\zeta)$$

证 由台劳公式：

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(\zeta_x)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$(x_0 < \zeta_x < x)$$

于是 $\int_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a) + \frac{f'(x_0)}{2!}[(b-x_0)^2 -$

$$-(a-x_0)^2] + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\zeta_x)(x-x_0)^2 dx$$

$$= f(x_0)(b-a) + \frac{f'(x_0)}{2!}(b-a)(a+b-2x_0)$$

$$+ \frac{f''(\zeta)}{6}[(b-x_0)^3 - (a-x_0)^3]$$

$$(a < \zeta < b)$$

令 $x_0 = \frac{a+b}{2}$代入上式即可得证。

例4 设 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2dt$，求证：$\forall x>0$，

$$|f(x)|<\frac{1}{x}.$$

证 将积分 $f(x)=\int_x^{x+1}\sin t^2dt$ 作变量替换：$t=\sqrt{u}$，

于是

$$f(x)=\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du$$

$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{\cos u}{\sqrt{u}}\Big|_{x^2}^{(x+1)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos udu}{u^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$=\frac{\cos x^2}{2x}-\frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)}-$$

$$-\frac{1}{4}\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{\cos udu}{u^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow |f(x)|<\frac{1}{2x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{4}\left|\int_{x^2}^{(x+1)^2}\frac{du}{u^{3/2}}\right|=\frac{1}{x}$$

上面四个例题的证明过程主要用换元法、分部积分法、积分中值定理和台劳公式等，虽然证明很简单，但是可以得到重要的结论，下面例题是利用定积分定义将积分不等式化为离散量的不等式，再通过求极限得到要证的积分不等式。

例5 设 $f''(x)\geqslant 0$，$x\in(-\infty,\ +\infty)$，$g(x)\in C[a,b]$，则有：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(g(t))dt \geqslant f\left(\frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt\right)$$

证法1 根据定积分定义：

$$\frac{1}{a}\int_0^a f(g(t))dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(g\left(\frac{ka}{n}\right)\right) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{ka}{n}\right) \qquad (2)$$

在（1）和（2）中设 $x_k = g\left(\frac{ka}{n}\right)$，$q_k = \frac{1}{n}$，$k = 1, 2, \cdots, n$。

因为 f 是凸函数，由金松（Jenson）不等式：

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} q_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} q_k f(x_k)，\text{其中} \sum_{k=1}^{n} q_i = 1，q_i > 0。$$

得到下面不等式：

$$f\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{ka}{n}\right)\right] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(g\left(\frac{ka}{n}\right)\right)$$

因为 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，将上不等式取极限即可得证。

证法2 记 $A = \frac{1}{a}\int_0^a g(t)dt$，因为 f 是可微凸函数，所以 $f(x) \geqslant f(A) + f'(A)(x - A)$ (1)

将 $x = g(t)$ 代入（1）式，积分即可得证。

用同样方法可以利用不等式

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

证明不等式

$$\frac{b-a}{\int_a^b \frac{dx}{f(x)}} \leqslant \exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right] \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

其中 $f\in R[a,\ b]$，且 $f(x)\geqslant C>0$。

利用二重积分证明积分不等式也是一种方法，例如考虑二重积分：

$$\iint_D [f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2 dxdy, D=[a,b]\times[c,\ d],$$

可以证明柯西不等式：

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leqslant \left[\int_a^b f^2(x)dx\right]\left[\int_a^b g^2(x)dx\right].$$

例6 设 $f\in C[a,\ b]$，f 在 $[a,\ b]$ 外等于零，$\varphi(x)=\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$，其中 $h>0$，则有

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

证 令 $u=t-x$，得

$$\int_{x-h}^{x+h} |f(t)|\,dt = \int_{-h}^{h} |f(u+x)|\,du$$

$|f(u+x)|$ 作为 u，x 的二元函数是连续的。

$$\therefore \quad \int_a^b\left(\int_{-h}^h |f(u+x)|\,du\right)dx = \int_{-h}^h\left(\int_a^b |f(u+x)|\,dx\right)du,$$

又令 $v=u+x$，则

$$\int_a^b |f(u+x)|\,dx = \int_{a+u}^{b+u} |f(v)|\,dv \leqslant \int_a^b |f(v)|\,dv$$

于是

$$\int_a^b |\varphi(x)|\,dx = \int_a^b \left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt\right| dx$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_a^b\left(\int_{x-h}^{x+h}|f(t)|\,dt\right)dx$$

$$=\frac{1}{2h}\int_a^b\left(\int_{-h}^{h}|f(u+x)|\,du\right)dx$$

$$=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_a^b|f(u+x)|\,dx\right)du$$

$$\leqslant \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\left(\int_a^b|f(v)|\,dv\right)du$$

$$=\int_a^b|f(v)|\,dv.$$

这就是所要证的不等式。

例7 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 内连续可微，证明：对于 $\forall x\in[0, 1]$ 有

$$|f(x)|\leqslant\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)dt.$$

证 $\int_0^1|f(t)|\,dt=|f(\xi)|\geqslant\min\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|=|f(a)|$，

$a\in[0, 1]$，$\forall x\in[0, 1]$

$$|f(x)|=\left|f(a)+\int_a^x f'(t)dt\right|$$

$$\leqslant|f(a)|+\int_a^x|f'(t)|\,dt$$

$$\leqslant\int_0^1[|f(t)|+|f'(t)|]dt.$$

例8 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可微，且

$$\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|e^{-x^2}f'(x)|<+\infty$$

求证：$\sup\limits_{x\in(-\infty,+\infty)}|xe^{-x^2}f(x)|<+\infty$。

证 要证 $xe^{-x^2}f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界，因为

它在 $(-\infty, +\infty)$ 连续，所以只要证明 $\lim\limits_{|x|\to\infty} xe^{-x^2}f(x)$ 存在即可，由已知条件知道：$\exists M>0$，使 $|e^{-x^2}f'(x)|\leqslant M$ 当 $x\in(-\infty, +\infty)$，即

$$|f'(x)|\leqslant Me^{x^2}$$

由 $f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt$ 得到：

$$|f(x)|\leqslant|f(0)|+\left|\int_0^x |f'(t)|\,dt\right|$$

$$\therefore\quad |xe^{-x^2}f(x)|\leqslant|f(0)|\,|x|\,e^{-x^2}+M\,|x|\,e^{-x^2}\left|\int_0^x e^{u^2}du\right|$$

$$\leqslant|f(0)|\,|x|\,e^{-x^2}+M\,|x|\,e^{-x^2}\int_0^{|x|}e^{u^2}du$$

$$=\phi(x).$$

因为 $\lim\limits_{v\to+\infty} ve^{-v^2}\int_0^v e^{u^2}du=\lim\limits_{v\to+\infty}\dfrac{v\int_0^v e^{u^2}du}{e^{v^2}}$

$$=\lim_{v\to+\infty}\frac{ve^{v^2}+\int_0^v e^{u^2}du}{2ve^{v^2}}=\frac{1}{2}+\lim_{v\to+\infty}\frac{\int_0^v e^{u^2}du}{2ve^{v^2}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lim_{v\to+\infty}\frac{e^{v^2}}{e^{v^2}+2v^2e^{v^2}}=\frac{1}{2}.$$

并且 $\lim\limits_{|x|\to\infty}|f(0)|\,|x|\,e^{-x^2}=0$。

$\therefore$ $\lim\limits_{|x|\to\infty}\phi(x)$存在，所以 $\phi(x)$在$(-\infty, +\infty)$ 上有界。

$\therefore$ $xe^{-x^2}f(x)$在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界。

例4 设函数 $f(x)$在$[a, b]$上连续，在任意区间 $[\alpha,\beta]\subset[a, b]$上有不等式：

$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)dx\right|\leqslant M\,|\beta-\alpha|^{1+\delta}\quad (M,\ \delta \text{ 是正常数})$$

试证：在$[a,b]$上$f(x)\equiv 0$。

证 任取$x_0\in(a,\ b)$及$\varepsilon_k\to 0$使$x_0+\varepsilon_k<b$，于是

$$|f(x_0+\eta_k)|\cdot\varepsilon_k=\left|\int_{x_0}^{x_0+\varepsilon_k}f(x)dx\right|\leqslant M\varepsilon_k^{1+\delta}$$

$\therefore\quad |f(x_0+\eta_k)|\leqslant M\varepsilon_k^{\delta}\to 0\ (k\to\infty),\quad (0<\eta_k<\varepsilon_k)$

$\therefore\quad \lim\limits_{k\to+\infty}f(x_0+\eta_k)=0$。

又 $x_0+\eta_k\to x_0$，根据f的连续性知$f(x_0)=0$，

$\therefore$ $f(x)$在$(a,\ b)$上恒为零。再根据f的连续性知$f(x)$在$[a,\ b]$上恒为零。

(2) 积分的极限性质

研究积分的极限性质常用的方法有：(1) 用阶梯函数逼近的方法，(2) 小区间法，(3) ε-δ方法，(4) 利用黎曼引理的方法。

例1 设f在任何区间$[0,\ A]$上可积，且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=l.$$

证 由已知条件：$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$，可知

$\forall\varepsilon>0$，$\exists E>0$，$\forall x\geqslant E$，有$|f(x)-l|<\varepsilon$。$\forall x\geqslant E$ 有

$$\left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt-l\right|=\left|\frac{1}{x}\int_0^x[f(t)-l]dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{x}\int_0^E|f(t)-l|dt+\frac{1}{x}\int_E^x|f(t)-l|\,dt$$

$$\leqslant\frac{(M(E)+l)E}{x}+\frac{x-E}{x}\varepsilon<\frac{M(E)+l}{x}E+\varepsilon$$

取$x\geqslant E$，使得$\dfrac{M(E)+l}{x}E<\varepsilon$，即得证。

其中 $M(E)=\frac{1}{E}\int_0^E |f(t)|\,dt$。

我们采用“小区间法”和阶梯逼近法证明下面例题。

例2 设 $f\in R[a,b]$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,|\sin nx|\,dx=$

$=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$。

证法1 用“小区间法”证明：

为书写简明令 $a=0$，$b=2\pi$。

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,|\sin nx|\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{k\frac{2\pi}{n}} f(x)\,|\sin nx|\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\int_{(k-1)\frac{2\pi}{n}}^{k\frac{2\pi}{n}} |\sin nx|\,dx$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} |\sin[2(k-1)\pi+nt]|\,dt$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\int_0^{\frac{2\pi}{n}} |\sin nt|\,dt=\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\cdot\frac{4}{n}$$

$$=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\frac{2\pi}{n}\xlongequal{\text{令}\triangle x_{kn}=\frac{2\pi}{n}}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\triangle x_{kn}$$

$$\to\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx\quad(n\to\infty)$$

其中 $M_{kn}=\sup\limits_{x\in\triangle x_{kn}}\{f(x)\}\geqslant f_{kn}\geqslant m_{kn}=\inf\limits_{x\in\triangle x_{kn}}\{f(x)\}$。

证法2 采用“阶梯逼近法”

(1) 当 $f(x)=1$ 时

将数轴分成形如$\left[\frac{k\pi}{\lambda}, \frac{(k+1)\pi}{\lambda}\right]$的小区间($k=0$, ± 1, $\cdots$) 设$a\in\left[\frac{(k_1-1)\pi}{\lambda}, \frac{k_1\pi}{\lambda}\right]$, $b\in\left[\frac{k_2\pi}{\lambda}, \frac{(k_2+1)\pi}{\lambda}\right]$, 则

$$\int_a^b |\sin \lambda x|\, dx = \int_a^{\frac{k_1\pi}{\lambda}} |\sin \lambda x|\, dx + \int_{\frac{k_2\pi}{\lambda}}^b |\sin \lambda x|\, dx + \sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{\frac{k\pi}{\lambda}}^{\frac{(k+1)}{\lambda}} |\sin \lambda x|\, dx$$

容易证明：$\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_a^{\frac{k_1}{\lambda}} |\sin \lambda x|\ dx = \lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_{\frac{k_2\pi}{\lambda}}^b |\sin \lambda x| dx = 0$.

又知道 $\int_{\frac{k\pi}{\lambda}}^{\frac{(k+1)\pi}{\lambda}} |\sin \lambda x|\, dx = \left|\int_{\frac{k\pi}{\lambda}}^{\frac{(k+1)\pi}{\lambda}} \sin \lambda x dx\right| = \frac{2}{\lambda}$

于是得到

$$\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_{\frac{k\pi}{\lambda}}^{\frac{(k+1)\pi}{\lambda}} |\sin \lambda x|\, dx = \frac{2(k_2-k_1)}{\lambda}$$

又因为 $\frac{k_2-k_1}{\lambda}\pi \leqslant b-a \leqslant \frac{k_2-k_1}{\lambda}\pi + \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\frac{k_2-k_1}{\lambda} \leqslant \frac{b-a}{\pi} \leqslant \frac{k_2-k_1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda}$$

所以 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{k_2(\lambda)-k_1(\lambda)}{\lambda} = \frac{b-a}{\pi}$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_a^b |\sin \lambda x|\, dx = \frac{2(b-a)}{\pi} = \frac{2}{\pi}\int_a^b 1\cdot dx$$

(ii) 当 $f(x)$ 是阶梯函数时，设 f 在每个区间$[x_{i-1}, x_i]$

上为常数 c_i，则

$$\int_a^b f(x)\ |\sin\lambda x|\ dx=\sum_{i=1}^{n}c_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}|\sin\lambda x|\ dx$$

$$=\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{2}{\pi}(x_i-x_{i-1})=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}c_i\triangle x_i=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$$

(iii) 当 $f(x)\in R[a,\ b]$时，$\forall\varepsilon>0$，存在阶梯函数 $g_1(x)$和 $g_2(x)$：$g_1(x)\leqslant f(x)\leqslant g_2(x)$ (1)

使得

$$0<\int_a^b[g_2(x)-g_1(x)]dx<\varepsilon \tag{2}$$

由不等式(1)，可得到积分不等式：

$$\int_a^b g_1(x)\ |\sin\lambda x|\ dx\leqslant\int_a^b f(x)\ |\sin\lambda x|\ dx$$

$$\leqslant\int_a^b g_2(x)\ |\sin\lambda x|\ dx$$

设 $u_1=\frac{2}{\pi}\int_a^b g_1(x)dx$，$u_2=\frac{2}{\pi}\int_a^b g_2(x)dx$，$u=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx$

$$v_1(\lambda)=\int_a^b g_1(x)\ |\sin\lambda x|\ dx,\quad v_2(\lambda)=\int_a^b g_2(x)\ |\sin\lambda x|dx,$$

$v(\lambda)=\int_a^b f(x)\ |\sin\lambda x|\ dx$。

由 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}v_1(\lambda)=u_1$ 及 $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}v_2(\lambda)=u_2$，可知

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists\lambda_0>0,\ \forall\lambda>\lambda_0,\ 有\ v_1(\lambda)>u_1-\varepsilon$$

$$v_2(\lambda)<u_2+\varepsilon。$$

即 $u_1-\varepsilon<v_1(\lambda)<v(\lambda)<v_2(\lambda)<u_2+\varepsilon$

且 $0<u_2-u_1<\frac{2}{\pi}\varepsilon<\varepsilon$，$u_1<u<u_2$。

由上面两个不等式可以得到：

$$|u-v(\lambda)|<2\varepsilon$$

即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\lambda_0>0$，$\forall\lambda>\lambda_0$，可使

$$\left|\int_a^b f(x)\,|\sin\lambda x|\,dx-\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx\right|<2\varepsilon.$$

$$\therefore\quad \lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin\lambda x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)dx.$$

例3 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上不减，对于任何 $T>0$，$f(x)$ 在 $[0,T]$ 上可积，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt=c$。

证明：

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=c$$

证 对于任何 $x>0$，由 f 的单调性可知：

$$\frac{2}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt\leqslant f(x)\leqslant\frac{2}{x}\int_x^{\frac{3}{2}x}f(t)dt$$

所以

$$\frac{2}{x}\int_x^{\frac{3x}{2}}f(t)dt=\frac{2}{x}\left[\int_0^{\frac{3x}{2}}f(t)dt-\int_0^x f(t)dt\right]$$

$$=3\left[\frac{2}{3x}\int_0^{\frac{3x}{2}}f(t)dt\right]-2\left[\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right]$$

$$\to 3c-2c=c\quad（当\ x\to+\infty）$$

同样可以证得

$$\frac{2}{x}\int_{\frac{x}{2}}^{x}f(t)dt\to c\quad（当\ x\to+\infty）$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=c$$

（五）多元函数：多元函数的极限、微分、积分等问题较一元函数复杂得多，我们只举几个例题说明这方面的问

题。例如二元函数求极限时，关于待定型的确定方法较为困难，没有类似一元函数待定型的洛必达法则可用，但经常归纳为二次极限。

例1 设 $f(x, y)$ 是区域 D：$|x| \leqslant 1$，$|y| \leqslant 1$ 上的有界 $k(k \geqslant 1)$ 次齐次函数，问极限

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \{f(x, y) + (x-1)e^y\} \quad \text{存在否？}$$

解 由函数的连续性，可知当 $x \to 0$，$y \to 0$ 时 $(x-1)e^y \to -1$。

令 $\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned} \qquad (x, y) \in D.$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x, y) = \lim_{r \to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta), \ \forall\theta.$$

而 $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leqslant |r^k f(\cos\theta, \sin\theta| \leqslant r^k M \to 0$

$(r \to 0)$

$$\therefore \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \{f(x, y) + (x-1)e^y\} = -1.$$

例2 计算 $\displaystyle\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$

解 这是一个待定型，因为

$$\sin(x^3 + y^3) \sim x^3 + y^3 \qquad (x \to 0, \ y \to 0)$$

$$\therefore \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\because x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x + y) - xy^2 - x^2 y$$

$$\therefore \left|\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right| = \left|(x + y) - \frac{xy(x + y)}{x^2 + y^2}\right|$$

$$= |x + y| \left|1 - \frac{xy}{x^2 + y^2}\right|$$

$$\leqslant(|x|+|y|)\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{3}{2}(|x|+|y|)$$

∴ $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\frac{\varepsilon}{3}$，当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$时，但$(x, y)\neq(0, 0)$，不等式

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$$

成立。

所以 $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^3+y^3)}{(x^2+y^2)}=0$$

或者作变换 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，则

$$\left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| = |r(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|\leqslant 2r\to 0\quad(r\to 0)$$

因为 θ 变动而 $r\to 0$ 相当于 $(x,y)\neq(0,0)$时$(x, y)\to(0,0)$。

例3 设 $f(x, y)$ 是区域 $G\subseteq R^2$ 上的可微函数，且 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}=0$，$(x,y)\in G$。求证：当$(x,y)\in G$时，$f(x, y)$ 恒为常数。

证 由于区域 G 是连通的开集，所以对于任意两点 $A(x_1, y_1)$，$B(x_n,y_n)\in G$，存在一条由 G 中的点：$A=M_1(x_1, y_1)$，$M_2(x_2, y_2)$，…，$M_n(x_n, y_n)=B$ 连接而成的折线。

我们只要证明 $f(x_1, y_1)=f(x_2, y_2)=\cdots=f(x_n, y_n)$ 对于每个 $M_i(x_i, y_i)$，$M_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$，$i=1, 2, \cdots, n-1$。

记

$$x = x_i + (x_{i+1} - x_i)t$$

$$y = y_i + (y_{i+1} - y_i)t$$

显然当　$t=0$ 时，$(x,\ y) = (x_i,\ y_i)$

　　　　$t=1$ 时，$(x,\ y) = (x_{i+1};\ y_{i+1})$

则函数 $\varphi(t) = f(x_i + (x_{i+1} - x_i)t,\ y_i + (y_{i+1} - y_i)t)$ 在$[0,1]$ 内可微。

利用一元函数的微分中值定理：$\exists\xi \in (0,\ 1)$ 使得

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\xi)$$

$\therefore$　$f(x_{i+1},\ y_{i+1}) - f(x_i,\ y_i)$

$$= (x_{i+1} - x_i)\frac{\partial f(x_i + (x_{i+1} - x_i)\xi, y_i + (y_{i+1} - y_i)\xi)}{\partial x} +$$

$$+ (y_{i+1} - y_i)\frac{\partial f(x_i + (x_{i+1} - x_i)\xi, y_i + (y_{i+1} - y_i)\xi)}{\partial y}$$

$= 0$。

所以　$f(x_{i+1},\ y_{i+1}) = f(x_i,\ y_i)$　$(i = 1,\ 2, \cdots, n-1)$

例4　求函数 $u = x^4 + y^4 + z^4$，在 $xyz = 1$ 下的极值。这极值是极大还是极小？为什么？

解　求可疑极值点，为此利用拉格朗日乘数法：

令　$v = x^4 + y^4 + z^4 - \lambda(xyz - 1)$

由方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = 4x^3 - \lambda yz = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = 4y^3 - \lambda xz = 0 \\ \dfrac{\partial v}{\partial z} = 4z^3 - \lambda xy = 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$$

的前三个方程解得：$x^4=y^4=z^4$，由此求出可疑极值点是：

$$M_1=(1,\ 1,\ 1),\qquad M_2=(1,\ -1,\ -1)$$

$$M_3=(-1,\ -1,\ 1),\quad M_4=(-1,\ 1,\ -1)$$

且 $u(M_1)=u(M_2)=u(M_3)=u(M_4)=3$。

当 $xyz=1$ 时：

$$u=x^4+y^4+z^4\geqslant 3(xyz)^{\frac{4}{3}}=3$$

∴ $M_i(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 全是极小值点，且极小值等于3。

例5 求出边长为a，b，c，d 的四边形的最大面积（不必验证其最大面积）。

解 如图2，求面积 $S(x,\ y)=\frac{1}{2}ad\sin x+\frac{1}{2}bc\sin y$

在约束条件：

$$a^2+d^2-2ad\cos x=b^2+c^2-2bc\cos y$$

之下的条件极值点。

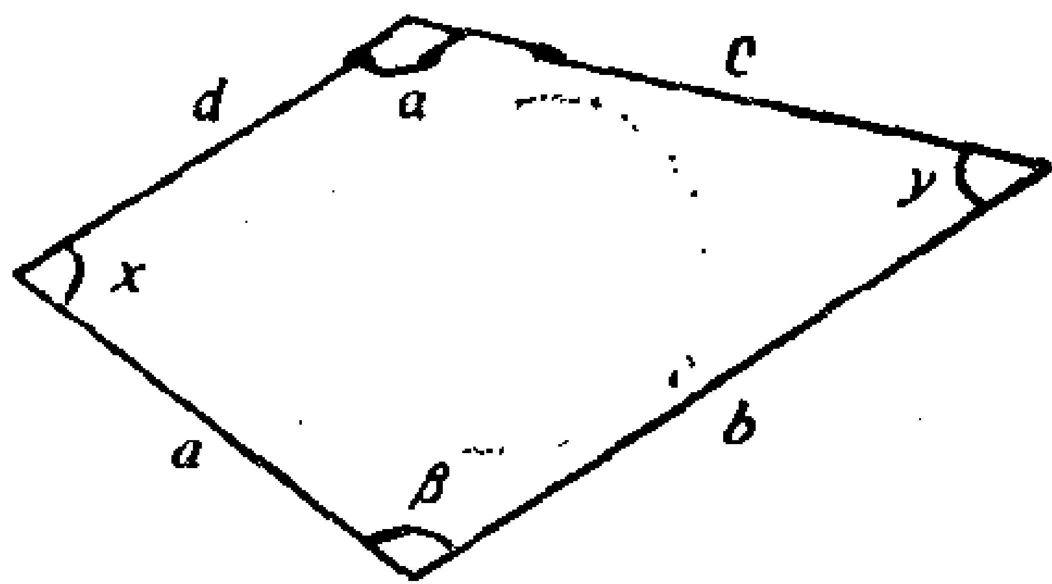


图 2

令 $u(x,y)=2ad\sin x+2bc\sin y+\lambda[a^2+d^2-b^2-c^2+2bc\cos y-2ad\cos x]$

由方程组：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2ad\cos x+2ad\lambda\sin x=0 & ①\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial y}=2bc\cos y-2bc\lambda\sin y=0 & ②\\[2mm] a^2+d^2-2ad\cos x=b^2+c^2-2bc\cos y & ③\end{cases}$$

确定可疑极值点。

由①式得到：$\operatorname{ctg} x=-\lambda$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} = \sqrt{1+\lambda^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \cos x = \dfrac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{cases}$$

由②式得到： $\begin{cases} \sin y = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ \cos y = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{cases}$

由此可得：$x+y=\pi$，代入③式可得：

$$a^2+d^2+2ad\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} = b^2+c^2-2bc\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\therefore \quad \lambda^2 = \frac{(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}{4(ad+bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}$$

于是 $\sqrt{1+\lambda^2} = \dfrac{2(ad+bc)}{\sqrt{4(ad+bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2}}$

记 $\sin x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

$\sin y_0 = \dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

将 $\sin x_0$，$\sin y_0$ 代入 $s(x, y)$ 得：

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}(ad+bc)\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{4(ad+bc)^2-(b^2+c^2-a^2-d^2)^2} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \end{aligned}$$

其中 $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$

特别当 $a=b=c=d$ 时，

$$S=a^2.$$

下面举几个多重积分的例题。

例1 (1) 计算 $A=\int_0^1\int_0^1\left|xy-\frac{1}{4}\right|dxdy$

(2) 设 $z=f(x,y)$ 在闭正方形 D: $\begin{matrix}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{matrix}$ 上连续，且满足下列条件：

$$\iint_D f(x,y)dxdy=0,$$

$$\iint_D xyf(x,y)dxdy=1.$$

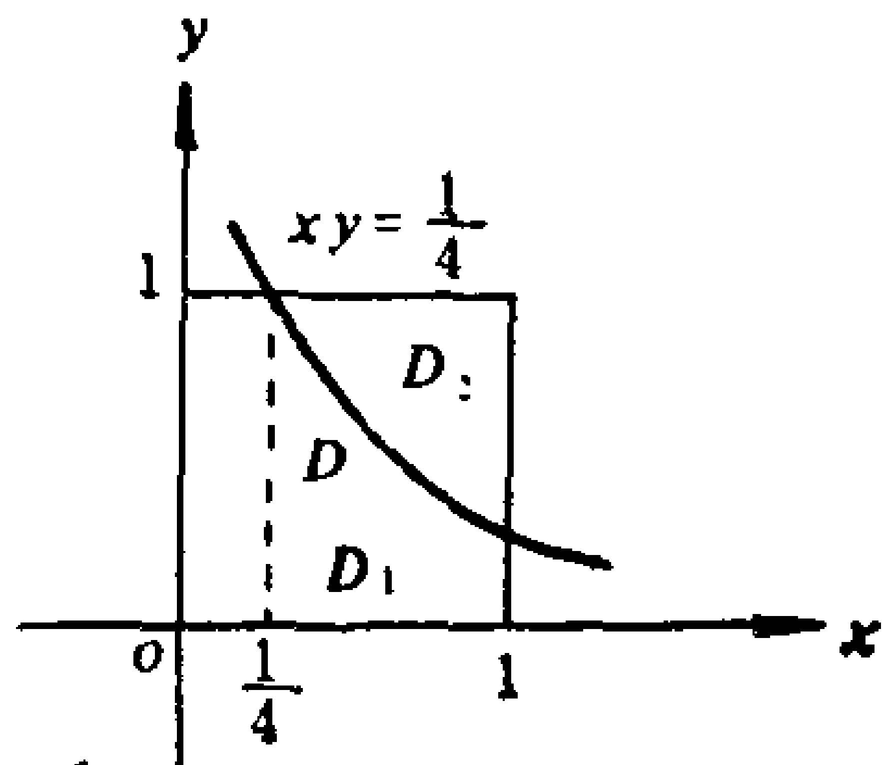


图 3

证明：$\exists(\xi,\eta)\in D$，使 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}$.

解 (1) $A=\iint_D\left|xy-\frac{1}{4}\right|dxdy$

$$=\iint_{D_1}\left(\frac{1}{4}-xy\right)dxdy+\iint_{D_2}\left(xy-\frac{1}{4}\right)dxdy$$

$$=\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\ln 2.$$

(2) 令 $\bar{f}(x,y)=\begin{cases}f(x,y), & (x,y)\in D_2\\-f(x,y), & (x,y)\in D_1\end{cases}$

则 $|\bar{f}(x,y)|=|f(x,y)|$ 在区域 D 上连续。

下边用反证法证明(2)的结论。

若 $\forall(x,y)\in D$，$|\bar{f}(x,y)|=|f(x,y)|<\frac{1}{A}$.

则 $\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right|\bar{f}(x,y)dxdy\leqslant\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right| |f(x,y)|dxdy$

$=\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right| |f(x,y)|dxdy=|f(\xi,\eta)|\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right|dxdy$

$<\frac{1}{A}\cdot A=1$

但是另一方面

$$\iint\limits_D \left|xy-\frac{1}{4}\right|\bar{f}(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{D_1}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\left(-f(x,y)\right)dxdy+$$

$$+\iint\limits_{D_2}\left(xy-\frac{1}{4}\right)f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_D\left(xy-\frac{1}{4}\right)f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_D xyf(x,y)dxdy-\frac{1}{4}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$$

$$=1.$$

于是得到矛盾的结果，所以$\exists(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta)\geqslant\frac{1}{A}.$$

例2 设$a^2+b^2+c^2>0$，$f(x)$ 在 $|x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$时连续。试证：

$$\iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant\pi\\0\leqslant\theta\leqslant2\pi}}f(a\sin\varphi\cos\theta+b\sin\varphi\sin\theta+c\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta.$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} f(t\sqrt{a^2+b^2+c^2})dt \qquad (1)$$

证 因为

$$|a\sin\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\cos\varphi|$$

$$\leqslant\sqrt{(a^2+b^2+c^2)(\sin^2\varphi\cos^2\theta+\sin^2\varphi\sin^2\theta+\cos^2\varphi)}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

∴ 等式(1)两端的积分存在。

单位球面(S)的参数方程为：

$$\begin{cases} x=\sin\varphi\cos\theta, & 0\leqslant\varphi\leqslant\pi \\ y=\sin\varphi\sin\theta, & 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi \\ z=\cos\varphi. \end{cases}$$

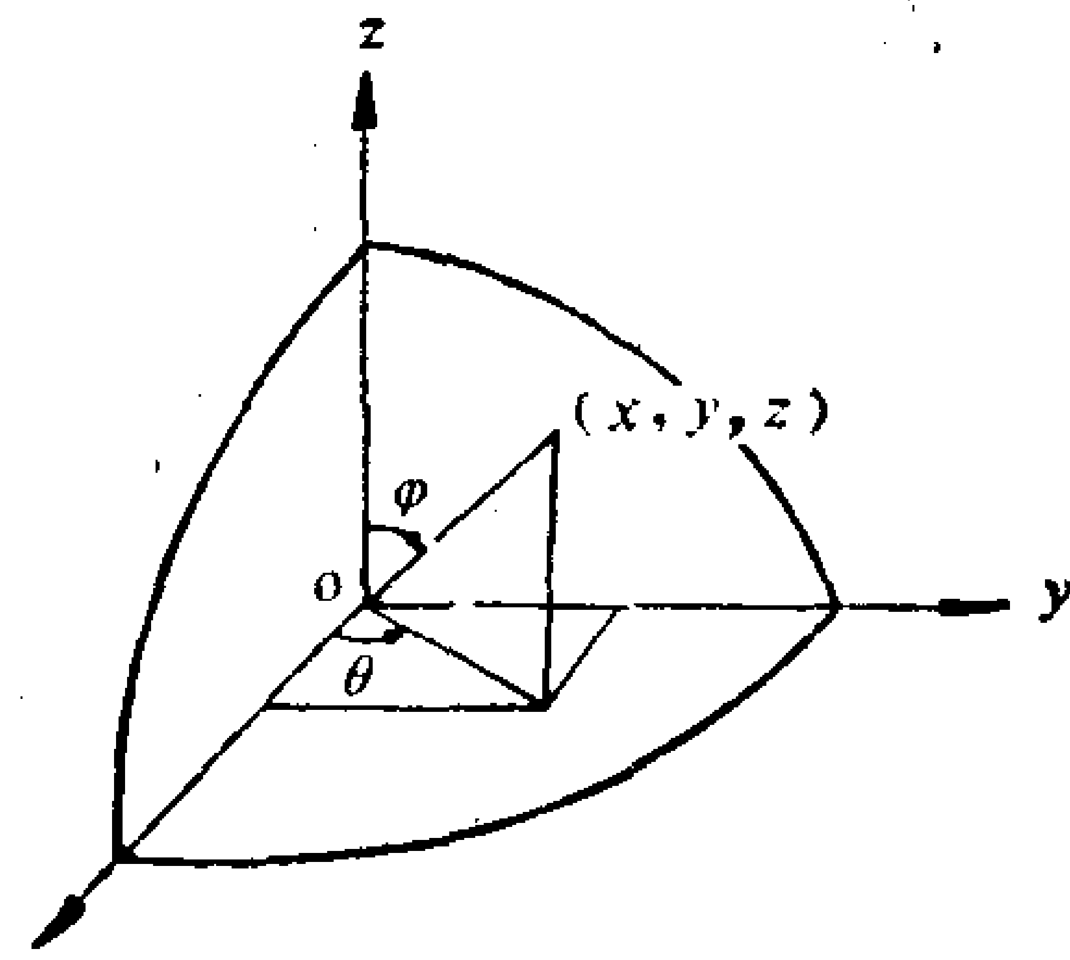


图 4

∴ $\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi$， 当 $0\leqslant\varphi\leqslant\pi$。其中 E、G、F为高斯系数。

$$\therefore \iint\limits_{\substack{0\leqslant\varphi\leqslant\pi\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} f(a\sin\varphi\cos\theta + b\sin\varphi\sin\theta + c\sin\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$=\oiint\limits_{(S)} f(ax+by+cz)ds$$

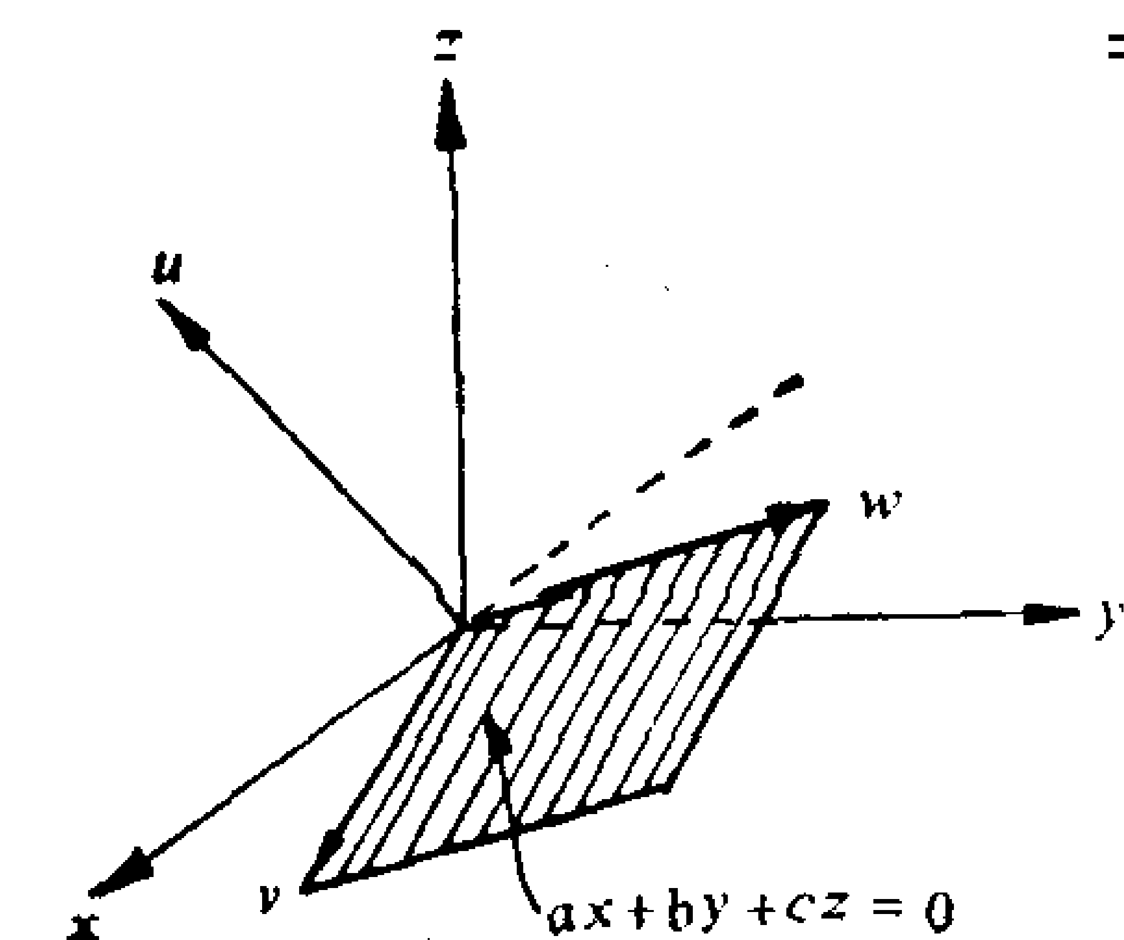


图 5

换作直角坐标系 $o\text{-}uvw$，使 $ax+by+cz=0$ 为 vw 平面，u 轴⊥vw 平面。

$$\therefore \quad u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\therefore \quad \oiint\limits_{(S)} f(ax+by+cz)ds$$

$$= \oiint_{(S)} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})ds$$

其中(S)：$\begin{cases} u = u \\ v = \sqrt{1-u^2}\cos\eta & (-1 \leqslant u \leqslant 1) \\ w = \sqrt{1-u^2}\sin\eta & (0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi) \end{cases}$

$$\therefore \quad \oiint_{(S)} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})ds = \oiint_{\substack{-1 \leqslant u \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \eta \leqslant 2\pi}} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})dud\eta$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})du.$$

例3 设 $0 < a < 4$，记 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试证积分.

$\iiint_{R^3} \frac{|x| + |y| + |z|}{e^{r^a} - 1} dxdydz$ 收敛，且其值为

$$6\pi \int_0^{+\infty} \frac{\rho^3}{e^{\rho^a} - 1} d\rho$$

证 取以 O 为中心，半径为 R的球 V_R：

它在第一卦限部分为

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta, & 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta, & 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ z = \rho\cos\varphi, & 0 \leqslant \rho \leqslant R. \end{cases}$$

$$\therefore \quad \iiint_{V_R} \frac{|x| + |y| + |z|}{e^{r^a} - 1} dxdydz$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \frac{\rho(\sin\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi)}{e^{r^a} - 1} \rho^2 \sin\varphi d\rho$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2\varphi \sin\theta + \sin^2\varphi \sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi] d\varphi \times$$

$$\times \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{e^{\rho^a} - 1} = 6\pi \int_0^R \frac{\rho^3 d\rho}{e^{\rho^a} - 1}$$

问题归结为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\rho^3 d\rho}{e^{\rho^a} - 1}, \quad 0 < a < 4.$$

是否收敛

$\rho = 0$ 是瑕点。

当 $\rho \to 0^+$ 时，$e^{\rho^a} - 1 \sim \rho^a$，$\dfrac{\rho^3}{e^{\rho^a} - 1} \sim \rho^{3-a}$，而 $3 - a > -1$。

$\therefore \quad \int_0^1 \dfrac{\rho^3}{e^{\rho^a} - 1} d\rho$ 收敛。因为

$$\lim_{\rho \to +\infty} \rho^2 \frac{\rho^3}{e^{\rho^a} - 1} = \lim_{\rho \to +\infty} \frac{5\rho^4}{e^{\rho^a} a\rho^{a-1}} = \lim_{\rho \to +\infty} \frac{5\rho^{5-a}}{2e^{\rho^a}} = \cdots = 0$$

$(a > 0)$

$\therefore \quad \int^{+\infty} \dfrac{\rho^3}{e^{\rho^a} - 1} d\rho$ 收敛。

$\therefore$ 积分 $\iiint\limits_{R^3} \dfrac{|x| + |y| + |z|}{e^{r^a} - 1} dxdydz$ 收敛。且其值为

$$6\pi \int_0^{+\infty} \frac{\rho^3}{e^{\rho^a} - 1} d\rho.$$

例4 给定重积分。

$$\iiint\limits_D \left(\frac{1}{yz}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{zx}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{xy}\frac{\partial F}{\partial z}\right) dxdydz.$$

其中 D：$1 \leqslant yz \leqslant 2$，$1 \leqslant xz \leqslant 2$，$1 \leqslant xy \leqslant 2$。

试将积分作下列变换：$u=yz$，$v=zx$，$w=xy$，要求变换后积分只出现 u，v，w 和 F 关于 u，v，w 的偏导数。$F\in C^1(D)$

解 因为
$$u=yz>0,\quad v=xz>0,\quad w=yx>0\qquad (x,\ y,\ z)\in D$$

∴ x，y，z 皆同号。

由
$$u=yz,\quad v=zx,\quad w=xy$$

决定两个连续的逆映射：

$$\Phi_1:\ \begin{cases} x=u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}} \\ y=u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}} \\ z=u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}} \end{cases}\qquad \mathscr{D}:\ \begin{cases} 1\leqslant u\leqslant 2 \\ 1\leqslant v\leqslant 2 \\ 1\leqslant w\leqslant 2 \end{cases}$$

及
$$\Phi_2:\ \begin{cases} x=-u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}} \\ y=-u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}} \\ z=-u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}} \end{cases}\qquad (u,\ v,\ w)\in\mathscr{D}.$$

设
$$D_1=\{(x,y,z)\mid (x,y,z)\in D,\ x,y,z>0\}$$
$$D_2=\{(x,y,z)\mid (x,y,z)\in D,\ x,y,z<0\}$$

则 $D=D_1\cup D_2$。

又 $\mathscr{D}=\{(u,v,w)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,\ 1\leqslant v\leqslant 2,\ 1\leqslant w\leqslant 2\}$

则 $D_1\overset{\Phi_1}{\longleftrightarrow}\mathscr{D}$　　$D_2\overset{\Phi_2}{\longleftrightarrow}\mathscr{D}$

∴
$$I=\iiint_D\left(\frac{1}{yz}\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{1}{zx}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{1}{xy}\frac{\partial F}{\partial z}\right)dxdydz$$

$$= \iiint_{D_1} \left(\frac{1}{yz}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{zx}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{xy}\frac{\partial F}{\partial z} \right) dxdydz +$$

$$+ \iiint_{D_2} \left(\frac{1}{yz}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{zx}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{xy}\frac{\partial F}{\partial z} \right) dxdydz +$$

$$= I_1 + I_2.$$

对于 I_1 作变换 Φ_1，得到

$$F(x,y,z) = F(u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}},\ u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}},\ u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}})$$

$$= F_1(u,v,w) \quad (u,v,w) \in \mathscr{D}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{yz}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{zx}\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{xy}\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$= 2u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}}\left(u\frac{\partial F_1}{\partial u} + v\frac{\partial F_1}{\partial v} + w\frac{\partial F_1}{\partial w} \right)$$

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \frac{1}{2}(u\,v\,w)^{-\frac{1}{2}} \qquad (u,v,w) \in \mathscr{D}.$$

$$\therefore \quad I_1 = \iiint_{\mathscr{D}} \left(\frac{1}{vw}\frac{\partial F_1}{\partial u} + \frac{1}{wu}\frac{\partial F_1}{\partial v} + \frac{1}{uv}\frac{\partial F_1}{\partial w} \right) dudvdw.$$

类似地可以得到：

$$I_2 = -\iiint_{\mathscr{D}} \left(\frac{1}{vw}\frac{\partial F_2}{\partial u} + \frac{1}{wu}\frac{\partial F_2}{\partial v} + \frac{1}{uv}\frac{\partial F_2}{\partial w} \right) dudvdw$$

其中 $F_2 = F(-u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}},\ -u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}w^{\frac{1}{2}},\ -u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}w^{-\frac{1}{2}})$

$$\therefore \quad I = \iiint_{\mathscr{D}} \left[\frac{1}{vw}\left(\frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{\partial F_2}{\partial u} \right) + \frac{1}{wu}\left(\frac{\partial F_1}{\partial v} - \frac{\partial F_2}{\partial v} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{uv}\left(\frac{\partial F_1}{\partial w} - \frac{\partial F_2}{\partial w} \right) \right] dudvdw.$$

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析习作课讲义 （下册）
作者＝薛宗慈 曾昭著
页数＝２８５
ＳＳ号＝１１０２０５５５
出版日期＝１９８７年０７月第１版

前言

目录

目录